Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
12.7.2021

Übungsklausur zur Linearen Algebra 1

Informationen zur Klausur: Wenn Sie im Studiengang B.Sc. Physik studieren, dann nehmen Sie an der Klausur (Prüfungsleistung) auf dem Campus teil, und zwar im Institut für Evolution und Ökologie, Auf der Morgenstelle 3 (NICHT im Hörsaalzentrum), Hörsaal N10, Einlass ab 10:00 Uhr. Bitte tragen Sie auf dem Campus eine Mund-Nasen-Maske. Wenn Sie im Studiengang B.Sc. Mathematik oder B.Ed. Mathematik studieren, nehmen Sie online am Test (Studienleistung) teil. Sowohl Klausur als auch Test finden am Dienstag, 27.7.2021, 10:15–12:15 Uhr statt. Beim Test laden Sie Ihre Aufgabenstellung von URM herunter und am Ende Ihre Lösung als PDF auf URM hoch. (Sie haben 2 Stunden als reine Bearbeitungszeit; falls Sie z.B. durch technische Schwierigkeiten Ihre Aufgabenstellung erst verspätet herunterladen konnten, geben Sie entsprechend später ab.)

Sie sind zur Klausur/zum Test zugelassen, wenn Sie mindestens die Hälfte der Punkte in den Hausaufgaben erreicht haben. Bitte melden Sie sich SOWOHL auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de` ALS AUCH auf `http://alma.uni-tuebingen.de` zur Klausur bzw. zum Test an. Im Falle des Nicht-Bestehens der Klausur/des Tests haben Sie die Möglichkeit, an der Nachklausur/dem Nachtest am Montag, 27.9.2021 um 9:15 Uhr teilzunehmen.

Nicht erlaubt ist während der Klausur/des Tests das Nutzen von Büchern, Skripten, Mitschriften, eigenen Notizen von vor der Klausur/dem Test, Internet-Quellen, Mathe-Software oder Taschenrechnern. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur/dem Test Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Teilnehmern Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der Klausur/des Tests besteht aus Kapitel 1–7 aus dem Skript (oder Videos 1–74) und den Übungsblättern 1–11; ausgenommen ist das Thema Minkowski-Raum (Video 62 und Abschnitt 6.41 im Skript). Alle Fakten, die in der Vorlesung erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Hinweise zur Bearbeitung: Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen. Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Die Punktzahlen addieren sich zu 100. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur/der echte Test. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (12 Punkte)

Wenn wahr, geben Sie eine Begründung; wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ für alle reellen 2×2-Matrizen A, B.

b) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist AB stets regulär.

c) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist $A+B$ stets regulär.

d) Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Aufgabe 2: Matrix-Multiplikation (2 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel einer 2×2-Matrix $A \neq 0$, so dass $A^2 = 0$.

Aufgabe 3: Inverse Matrix (6 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}$, wobei a, b, c Parameter sind.

Berechnen Sie A^{-1} nach dem Gauß-Jordan-Verfahren. Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie $A^{-1}A$ berechnen.

Aufgabe 4: Zeilenumformung (6 Punkte)

Für jede der angegebenen Matrizen: Kann man sie aus $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ durch eine *einzelne* elementare Zeilenumformung erhalten?

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja
☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein

Aufgabe 5: Determinante (4 Punkte)

Sei $R = \begin{bmatrix} a & u & w \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, wobei $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ und u, v, w reelle Zahlen sind. Sei $A = R^T R$.

Benutzen Sie Eigenschaften der Determinante, um $\det(A)$ durch a, b, c, u, v, w auszudrücken.

Aufgabe 6: Gauß-Verfahren (6 Punkte)

Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, um die gegebene Matrix in allgemeine Zeilenstufenform zu bringen. Welchen Rang hat die Matrix? Geben Sie jeweils im Kästchen an, welche Zeilenumformung Sie verwenden (z.B. R_3+3R_2 oder $R_1 \leftrightarrow R_4$). (Die Zahl der Schritte kann geringer sein als die der eingezeichneten Felder für Matrizen.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lineare Abhängigkeit (4 Punkte)

a) Ist die folgende Menge linear abhängig oder unabhängig in $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$L \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(Beachten Sie, dass es sich um dieselben Vektoren wie bei Teil a) handelt.) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8: Beweis (12 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\dim U = n-1$. Zeigen Sie:

$$\text{Ist } W \text{ ein Unterraum von } V\text{, so ist } \dim(W \cap U) \geq \dim W - 1.$$

Aufgabe 9: Matrix-Darstellung eines Endomorphismus (4 Punkte)

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$ der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ vom Grade $\leq n$. Sei L die lineare Abbildung von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ nach $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ gegeben durch

$$Lp(x) = 3x^2 \frac{d}{dx} p(x) + (4x+5)p(x).$$

Bestimmen Sie die 3×2-Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(L)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (1, x)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ und der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$.

Aufgabe 10: Gram-Schmidt-Verfahren (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

(b) Orthonormieren Sie die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarprodukts $S_A(x, y) := \langle x, Ay \rangle$ unter Verwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Aufgabe 11: Komplexe Matrizen (4 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

☐ A ist selbstadjungiert

☐ A ist eine Projektion

☐ A ist unitär

☐ A ist invertierbar

Aufgabe 12: Duale Basis (4 Punkte)

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die duale Basis $\hat{v}_1, \hat{v}_2$. (Schreiben Sie dabei $\hat{v}_1$ und $\hat{v}_2$ als Zeilenvektoren.)

Aufgabe 13: Kleinste Quadrate (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für (z.B.) $A \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$ die orthogonale Projektion P von $\mathbb{R}^3$ auf Bild A durch $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ gegeben ist, sofern A^TA invertierbar ist.

(a) Seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Verifizieren Sie, dass hier A^TA invertierbar ist, und berechnen Sie P und Py. Erläutern Sie, warum das Ergebnis zeigt, dass die Gleichung $Ax = y$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie den Vektor u in $\mathbb{R}^2$, für den $||Au - y|| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} ||Ax - y||$, und berechnen Sie $||Au - y||$.

Aufgabe 14: Diagonalisierung rückwärts (6 Punkte)

Über eine Matrix $A \in M(2, \mathbb{R})$ wissen wir, dass sie die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$ hat und die zugehörigen Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wieso wissen Sie dann, dass A symmetrisch ist?
(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A, ohne A zu berechnen. Begründen Sie Ihre Antwort.
(c) Berechnen Sie A.

Aufgabe 15: Differenzialgleichung (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 16: Beweis (10 Punkte)

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| = 1$, aufgefasst als Spaltenvektor. Zeigen Sie, dass die $n \times n$-Matrix $Q = E - 2uu^T$ sowohl symmetrisch als auch orthogonal ist.