Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 2 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 26.04.21

9.1 DGLn erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die eine unbekannte Funktion und deren Ableitung(en) enthält.

Beispiel:

$$y'(x) = 3x^2 \left(1 + y^2(x)\right) \tag{1}$$

ist eine DGL erster Ordnung, weil als höchste Ableitung der gesuchten Funktion y die erste Ableitung y' auftritt. Wir versuchen, Lösungen zu bestimmen:

https://youtu.be/U9tvmvToxJI (3 min) (2)

Falls das Auseinanderreißen von dy und dx ok war, dann sind Funktionen der Form

$$y(x) = \tan(x^3 + c) \tag{3}$$

Lösungen der DGL – und zwar für beliebige $c \in \mathbb{R}$.

Stimmt das?
Und was machen wir mit dem c? https://youtu.be/lvOOoWkR08s (4 min) (4)

Ein Anfangswertproblem (AWP) besteht aus DGL und Anfangsbedingung, z.B.

$$y'(x) = 3x^2 \left(1 + y^2(x)\right), \quad y(0) = 1\,. \tag{5}$$

DGL. . . AWP. . . was soll das eigentlich alles?

https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20180419_001_mathnat2_0001?t=2760.00 (4min) (6)

Zurück zum Beispiel, jetzt direkt als AWP:

https://youtu.be/9NsNifcNh-s (4 min) (7)

Schön, aber war das Auseinanderreißen von dy und dx denn nun ok?

https://youtu.be/uW2SPGMcotM (14 min)[1] (8)

---

[1] Hier steckt die allgemeine Erklärung drin – als "Kochrezepte" genügen zunächst die anderen Videos.

Und was ist, wenn doch $g(y_0) = 0$ ist?

https://youtu.be/vtsB9oKii0w (2 min) (9)

Lösen Sie nun selbst:

$$y'(x) = y^2(x)\,, \quad y(0) = 1 \qquad \text{(Lösung im Skript)} \tag{10}$$

und

$$y'(x) = x\cos^2(x)\,\sin\big(y(x)\big), \quad y(0) = \pi\,. \tag{11}$$

9.2 Lineare DGLn erster Ordnung

$$y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x) \tag{12}$$

heißt *lineare* DGL 1. Ordnung – *homogen*, falls $g(x) = 0\ \forall\, x$, sonst *inhomogen*.
Die homogene DGL können wir bereits lösen:

https://youtu.be/Z9FOqkBWaeg (5 min) (13)

Beispiele:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ y' + xy &= 0 \\ y' + \tfrac{y}{2x} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{https://youtu.be/JMv0u5s\_KME (3 min)} \tag{14}$$

Was bringt uns Linearität?

https://youtu.be/PGqyNiVZU1Y (8 min) (15)

Wie finden wir eine partikuläre Lösung? Entweder durch *Raten*(!) oder durch

Variation der Konstanten. https://youtu.be/3n8xZ3NTulI (6 min) (16)

Beispiel:

$$y' + 5y = 20 \qquad \text{https://youtu.be/VdzhUT8ZFFY (6 min)} \tag{17}$$

Wie könnten wir im Folgenden raten?

a) $y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}$
b) $y' + 5y = 2x + 1$
c) $y' + 5y = \sin x$

Der erste Rateversuch wird so ähnlich aussehen wie die Inhomogenität. Manchmal müssen wir den Ansatz dann noch etwas ergänzen.

Probieren Sie ruhig auch mal Variantion der Konstanten an einem der drei Beispiele aus.

Wir können das dann im Forum und/oder im Livestream besprechen.