Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 4 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 03.05.21

9.3 Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Forts.)

Jetzt wollen wir

$$y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = f(x) \tag{1}$$

mittels *Variation der Konstanten* lösen.
Seien also y_1 und y_2 l.u. Lösungen der homogenen DGL. **Behauptung:**

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \tag{2}$$

$$\text{mit} \quad c_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}\, \mathrm{d}x\,, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\text{und} \quad W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \tag{4}$$

löst die inhomogene DGL. *WTF?* Im Skript erkläre ich, wie man auf diese Formel kommt. Hier stellen wir uns mal auf den umgekehrten Standpunkt und probieren einfach aus, ob's klappt:

https://youtu.be/IVMuAnX7jdg (9 min) (5)

Und nun ein Beispiel:

$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ https://youtu.be/Chi06X4zlxo (6 min) (6)

Einschub: DGL-Systeme

Jede DGL 2. Ordung ist äquivalent zu einem System aus zwei DGLn 1. Ordnung.

Beispiel: $y'' + y = 0$ & allgemein https://youtu.be/EY_5CbZsfMA (6 min) (7)

Schreiben Sie nun

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^{-2x} \tag{8}$$

um, in ein äquivalentes System von DGLn 1. Ordnung.

9.4 Existenz und Eindeutigkeit für DGLn 1. Ordnung

Fragestellung & Erwartungen https://youtu.be/OdKRYax5nsk (6 min) (9)

Ein Beispiel, bei dem vielleicht etwas Unerwartetes passiert:

$y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}\,,\ y(0) = 0$ https://youtu.be/1jXF6XkT7ao (2 min) (10)

Der folgende Satz erklärt, wann so etwas *nicht* passieren kann (d.h. warum unsere AWPe typischerweise *eindeutige* Lösungen haben).

Satz. (Picard-Lindelöf)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Rechteck

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x - x_0| \leq a\,,\ |y - y_0| \leq b\,,\ a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ fest}\right\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{11}$$

stetig und dort stetig nach y differenzierbar. Weiter seien M und h durch

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)| \quad \text{und} \quad h = \min\left(a, \tfrac{b}{M}\right) \tag{12}$$

definiert. Dann gibt es in der Umgebung

$$U_h(x_0) = \left\{x \,\middle|\, |x - x_0| < h\right\} \tag{13}$$

der Stelle x_0 genau eine Lösung des AWPs

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)\,, \quad y(x_0) = y_0\,. \tag{14}$$

Huch! Das sollten wir uns mal aufmalen!

https://youtu.be/j4a0EADLpGU (8 min) (15)

Überlegen Sie: Wie erklärt das jetzt, was im obigen Beispiel passiert ist?

Wenn Sie theorieaffin sind, dann werfen Sie auch einen Blick auf die Beweisskizze im Skript. Wenn Sie momentan primär daran interessiert sind, typische Aufgaben lösen zu können, dann begnügen Sie sich zunächst mit der Aussage des Satzes.

Übrigens: Der Satz gilt ganz analog für Systeme von DGLn 1. Ordnung (und damit, wegen des obigen Einschubs, auch für DGLn höherer Ordnung). Wir kommen darauf nochmal zurück, wenn wir die geeignete Sprache für dieses Situationen gelernt haben (Funktionen mehrerer Veränderlicher etc.).