

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 6 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 10.05.21

10.3 Diagonalisierbarkeit

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine reguläre (d.h. invertierbar) Matrix S gibt, so dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ <https://youtu.be/vB2AEQos1vY> (4 min) (2)

Wozu könnte das gut sein? <https://youtu.be/TZjfxLojZCo> (4 min) (3)

Bemerkungen:

$$S = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) \text{ ist regulär} \iff \det S \neq 0 \iff \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \text{ sind l.u.} \quad (4)$$

Ist A diagonalisierbar, so sind die λ_j EWe mit zugehörigen EVen \vec{s}_j :

<https://youtu.be/qY5DD0pZANc> (4 min) (5)

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer l.u.:

<https://youtu.be/zWxa6s0iyyS> (4 min) (6)

Damit sind $n \times n$ -Matrizen mit n *unterschiedlichen* EWe automatisch diagonalisierbar.

Überlegen Sie selbst: Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

HINWEIS: Bestimmen Sie EWe und eventuell EVen.

Hermiteische (und symmetrische) Matrizen sind besonders schön, denn

ihre EWe sind reell https://youtu.be/_sDeDYRdMj4 (2 min) und (8)

EVen zu unterschiedlichen EWe sind orthogonal zueinander
<https://youtu.be/APXaucIgtF4> (3 min) (9)

Es gilt sogar...

Satz. (Hauptachsentransformation)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch (symmetrisch), dann existiert eine unitäre (orthogonale) Matrix U mit

$$\bar{U}^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

wobei λ_j die Eigenwerte von A sind.

Was wäre überhaupt noch zu zeigen? <https://youtu.be/R4Cedn9XP2c> (4 min) (11)

Kurzanleitung zur Hauptachsentransformation (HAT)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch (oder $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch)

- (i) Berechne das charakteristische Polynom χ_A .
- (ii) Bestimme die Nullstellen von χ_A (also die EWe von A) mit Vielfachheiten.
- (iii) Bestimme zu jedem EW genügend (so viele wie die Vielfachheit der Nullstelle) zueinander orthogonale, normierte EVen \vec{u}_j .
- (iv) Dann ist $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ unitär (orthogonal), und $\bar{U}^T A U$ ist diagonal.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad \text{https://youtu.be/0FwSJq90Ppk} \quad (12 \text{ min}) \quad (12)$$

Anwendung:

$$A \text{ diagonalisierbar: } e^{Ax} = ? \quad \text{https://youtu.be/GkyDmVo_TY4} \quad (7 \text{ min}) \quad (13)$$

Überlegen Sie selbst: Wenn A hermitesch ist, wie können wir dann die HAT verwenden, um A^{-1} zu berechnen? Und an welcher Stelle erkennen wir, ob A überhaupt invertierbar ist?