Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 10 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 07.06.21

11.3 Partielle, Richtungs- und totale Ableitung (Forts.)

Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen waren nicht voll befriedigend. In einer Dimension gab es noch eine alternative Sichtweise:

Differenzierbarkeit bedeutet lineare Approximierbarkeit.
https://youtu.be/pOYSti70gkI (6 min) (1)

Definition: (Totale Differenzierbarkeit)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in M$. f heißt (total) differenzierbar in $\vec{x}_0$, falls es einen Vektor $\vec{a}$ gibt, mit

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot \vec{h} + o(|\vec{h}|)\,, \quad |\vec{h}| \to 0\,. \tag{2}$$

Dann heißt $(\nabla f)(\vec{x}_0) = \vec{a}$ Ableitung (Gradient) von f in $\vec{x}_0$.

Hat ∇f eine anschauliche Bedeutung? Ja!

∇f steht senkrecht auf den Höhenlinien und
zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von f.
https://youtu.be/qT9X7kyH5b4 (5 min) (3)

Und wie berechnen wir dieses ∇f?

Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in M$, $f : M \to \mathbb{R}$ diffbar in $\vec{x}_0$, dann gilt*

(i) *f ist setig in $\vec{x}_0$.*

(ii) *f ist nach allen Variablen partiell diffbar und es gilt*

$$(\nabla f)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \tag{4}$$

(iii) *Alle Richtungsableitungen existieren in $\vec{x}_0$ und es gilt* ($|\vec{v}| = 1$)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}\,. \tag{5}$$

Beweis:

https://youtu.be/qUvUMTCnHUE (7 min) (6)

Bestimmen Sie so $(\nabla f)(\pi, 1, 1)$ für

$$f(\vec{x}) = x_1^2 x_3 - x_2 x_3 \cos(x_1)\,. \tag{7}$$

Aber wann existiert ∇f überhaupt? Wenn alle partiellen Ableitungen *stetig* sind, genauer:

Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in M$, $f : M \to \mathbb{R}$. Weiter besitze f alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ und diese seien stetig in $\vec{x}_0$. Dann ist f diffbar in $\vec{x}_0$.*

Das können wir auch zeigen (oder Sie glauben es zunächst erst mal):

https://youtu.be/q-dlhpf7xSY (11 min) (8)

Übrigens: Es lässt sich nun wieder zeigen, dass Summen, Produkte und Verkettungen diffbarer Funktionen diffbar sind. Damit sind Polynome, exp, sin, cos überall diffbar. Quotienten stetiger Funktionen sind dort diffbar, wo der Nenner nicht Null ist, und für positive Argumente sich auch log und $\sqrt{\ }$ diffbar.

Überlegen Sie: War die Funktion...

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 = y \end{cases} \tag{9}$$

...aus dem letzten Beispiel von Anleitung 9 diffbar in $\vec{0}$? Und was hat das mit dem letzten Satz zu tun?

Zusammenfassung: Versuchen Sie, das folgende Tafelbild zu verstehen:

https://www.math.uni-tuebingen.de/user/stke/ss20/partA_RichtA_Gradient.jpg (10)

a) Welches Vorzeichen hat $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$?

b) Welches Vorzeichen hat $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$?

c) Welches Vorzeichen hat $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a, b)$?

d) Was zeigen die roten Pfeilchen an?

e) Wohin müsste ein rotes Pfeilchen an der Stelle (x_0, y_0) zeigen?

f) Gibt es Stellen mit $\nabla f = \vec{0}$? Wenn ja, wo?

Jetzt noch ein...

Satz. (Kettenregel bzw. Differentiation nach Kurve)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$ diffbar in $\vec{x}_0 \in M$; weiter sei $\vec{x} : [a, b] \to M$ diffbar in $t_0 \in (a, b)$ mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Dann ist $F := f \circ \vec{x} : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffbar in t_0 und es gilt

$$F'(t_0) = (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot \dot{\vec{x}}(t_0) \tag{11}$$

Huch! Was steht denn da?
Berechnen Sie für das folgende Beispiel die linke und die rechte Seite der Gleichung.

$$f(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2, \qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t_0 = \frac{\pi}{4} \tag{12}$$

Hinweis: $F(t) = (f \circ \vec{x})(t) = f(\vec{x}(t))$. Haben Sie eine Idee, warum der Satz gilt?