

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 11 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 10.06.21

Kurvenintegrale

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig (komponentenweise) und $\vec{x} : [a, b] \rightarrow M$ diffbar auf (a, b) . Wir nennen

$$\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} d\vec{x} := \int_a^b \vec{f}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt \quad (1)$$

Kurvenintegral von \vec{f} längs der Kurve $\mathfrak{K} = \{\vec{x}(t) : t \in [a, b]\}$.

Beispiele:

(a) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{9\pi}{4}]$ (2)

<https://youtu.be/BCYstixUJ-g> (6 min)

(b) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ **Probieren Sie's selbst!** (3)

Gibt es ein $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla F = \vec{f}$, dann wird es einfacher:

$$\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} d\vec{x} = F(\vec{x}(b)) - F(\vec{x}(a)) \quad \text{https://youtu.be/vnxvkyDRfz8 (2 min)} \quad (4)$$

Beispiel <https://youtu.be/CY1877vfMfA> (4 min) (5)

Und wozu das alles? Anwendungsbeispiele:

Arbeit im Kraftfeld, Potentiale, ... https://youtu.be/tythracw_lU (7 min) (6)

11.4 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Höhere partielle Ableitungen bilden wir durch mehrmaliges partielles Ableiten. Leiten wir zuerst nach x_j und dann nach x_k ab, so sind dafür zwei Schreibweisen üblich:

$$f_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \quad \text{https://youtu.be/ck0vWUtslag (3 min)} \quad (7)$$

Beispiel:

$$f(x, y) = e^{xy} + x \cos y \quad \text{https://youtu.be/Km6808b99Ik (4 min)} \quad (8)$$

Notation: f heißt k mal stetig (partiell) diffbar auf M , falls alle k -ten partiellen Ableitungen auf M existieren und stetig sind. Wir schreiben dann $f \in C^k(M)$, insbesondere

- $f \in C^0(M)$: f stetig
- $f \in C^1(M)$: alle part. Abl. existieren und sind stetig ($\Rightarrow f$ total diffbar auf M)

Satz. (Lemma von Schwarz)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(M)$. Weiter existiere $f_{x_j x_k}$ auf M und sei dort stetig. Dann folgt: $f_{x_k x_j}$ existiert ebenfalls, und es gilt $f_{x_k x_j} = f_{x_j x_k}$. (ohne Beweis)

Beispiel: Sei $f(\vec{x}) = y^3 \cos((x^4 - z^3)e^{xz}) + 2y e^{x+z}$. **Bestimmen Sie** $\frac{\partial^{20} f}{\partial x^7 \partial y^6 \partial z^7}(\vec{x})$.

Bemerkung: Hat ein Vektorfeld \vec{f} , komponentenweise C^1 , eine Stammfunktion F , d.h. $\vec{f} = \nabla F$, so gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \quad \text{https://youtu.be/VUMKstQk0pg (3 min)} \quad (9)$$

Überprüfen Sie damit, ob die Vektorfelder \vec{f} aus (2) & (3) Stammfunktionen haben.

Jetzt kommt noch ein bisschen Notation, die sich nächstes Mal beim mehrdimensionalen Satz von Taylor als sehr nützlich erweisen wird.

Wir lesen ∇f nun als Anwendung des Differentialoperators

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (10)$$

auf die Funktion f .

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(M)$ und $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Dann gilt

$$\left((\nabla \vec{h})^k f \right) (\vec{x}_0) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(\vec{x}_0) h_{j_1} \cdots h_{j_k} \quad (11)$$

https://youtu.be/tHlB-1e_mmY (13 min)

Bestimmen Sie die Hesse-Matrix f'' für die Funktion aus (8).

Schreiben Sie die Taylorreihe einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um x_0 mithilfe des Differentialoperators $(\frac{d}{dx} h)$ auf. Wir nehmen an, dass die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert, also

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k = \dots \quad (12)$$