

## Mathematik 2 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 12 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 14.06.21

---

### 11.4 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor (Forts.)

Mit der Vorarbeit vom letzten Mal können wir sofort erraten, wie der Satz von Taylor in mehreren Dimensionen aussehen sollte.

#### Satz. (Taylor)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^{K+1}(M)$ ,  $\vec{x}_0 + t\vec{h} \in M \forall t \in [0, 1]$ , dann gilt

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \sum_{k=0}^K \frac{((\nabla \vec{h})^k f)(\vec{x}_0)}{k!} + R_K \quad (1)$$

wobei

$$R_K = \frac{((\nabla \vec{h})^{K+1} f)(\vec{x}_0 + \vartheta \vec{h})}{(K+1)!} \quad \text{für ein } \vartheta \in (0, 1). \quad (2)$$

**Bemerkungen**     <https://youtu.be/cMpgJtH40VM> (3 min)     (3)

Beweisen können wir den Satz ebenfalls mit Rückgriff auf den eindimensionalen Fall:

<https://youtu.be/bzQ2yoSvkIw> (9 min)     (4)

---

Die ersten Terme der Taylorreihe sehen so aus:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{(\nabla f)(\vec{x}_0)}_{\text{Vektor}} \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T \underbrace{f''(\vec{x}_0)}_{\text{Matrix}} \vec{h} + \dots \quad (5)$$

So können wir im Prinzip die Reihe bestimmen, indem wir  $\nabla f$ ,  $f''$  etc. berechnen – besser geht's oft umgekehrt:

$$f(x, y) = \frac{e^y}{1-x} \quad \text{https://youtu.be/MjJjT6TT6HY} \quad (8 \text{ min}) \quad (6)$$

Sei  $g(x, y) = e^{xy} + \sin x$ . **Bestimmen Sie**

$$(\nabla g)(\vec{0}) \text{ und } g''(\vec{0}) \text{ mithilfe der Taylorreihe, d.h. ohne abzuleiten.} \quad (7)$$

---

## 11.5 Lokale Extrema

**Definition:** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\vec{x}_0 \in M$  heißt lokale Maximalstelle von  $f$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, mit

$$f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0) \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}_0 \quad \text{mit} \quad |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon. \quad (8)$$

$f(\vec{x}_0)$  heißt dann lokales Maximum.

(analog: "... Minimalstelle ...  $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$  ... Minimum.")

---

Kriterien für lokale Extrema lesen wir direkt an der Taylorreihe ab:

### Satz. (Lokale Extrema)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(M)$ .

(i) *Notwendige Bedingung:*

$$\text{Ist } \vec{x}_0 \in M \text{ lokale Extremstelle von } f \quad \Rightarrow \quad (\nabla f)(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

(ii) *Hinreichende Bedingung:*

$$\text{Ist } f \in C^2(M), \text{ gilt } (\nabla f)(\vec{x}_0) = \vec{0} \text{ und ist } f''(\vec{x}_0) \text{ positiv definit (negativ definit)} \\ \Rightarrow \quad \vec{x}_0 \text{ ist lokale Minimalstelle (Maximalstelle).}$$

$$\text{Begründung} \quad \text{https://youtu.be/VRCVwF1fyxc} \quad (3 \text{ min}) \quad (9)$$

### Bemerkungen:

1. Ist  $(\nabla f)(\vec{x}_0) = \vec{0}$  so heißt  $\vec{x}_0$  *kritischer Punkt* von  $f$ .
2. Neben Minima und Maxima treten an kritischen Punkten z.B. auch Sattelpunkte auf.

### Beispiele und Illustrationen in 2D

$$\text{https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20180614_002_mathnat2_0001?t=2108.00} \quad (10) \\ (6 \text{ min} - \text{ von } 35:08 \text{ bis } 41:31)$$

---

Und jetzt ein typisches Rechenbeispiel:

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 + y \quad \text{https://youtu.be/L1e4QrlewpY} \quad (6 \text{ min}) \quad (11)$$

**Untersuchen Sie analog**

$$g(x, y) = xy \quad \text{und} \quad h(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 4xy - 4x + 4y + 7. \quad (12)$$

---