Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2021
Dr. Stefan Keppeler

# Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 16 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 28.06.21

---

**Integration in krummlinigen Koordinaten (Forts. von 12.1)**

Bisher haben wir unsere Bereichsintegrale nur in kartesischen Koordinaten $\vec{x}$ formuliert. Manche Bereiche lassen sich aber in anderen Koordinaten viel hübscher angeben:

https://youtu.be/7yETFHIpyPM (3 min) (1)

Es wäre also schön, wenn wir auch in anderen Koordinaten $\vec{q}$ integrieren könnten. Das geht! Dabei müssen wir aber nicht nur den Integranden und die Integrationsgrenzen transformieren, sondern auch noch ein zusätzliches Gewicht einfügen:

$$\int \cdots \int_K f(\vec{x})\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int \cdots \int_{\widetilde{K}} f(\vec{x}(\vec{q})) \left| \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) \right| \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n \,. \tag{2}$$

https://youtu.be/XMceaPXyzfA (3 min)

Wir nennen dabei $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \left|\det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}}(\vec{q})\right| \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n$ das Volumenelement.

---

**Woher kommt diese Determinante im Volumenelement?**

Wir erinnern uns, wie wir eindimensional zum Integral kamen:

https://youtu.be/OSDAa5eh_kE (2 min) (3)

Mehrdimensional, in kartesischen Koordinaten, geht es ganz ähnlich:

https://youtu.be/dXZxVF9rxe0 (4 min) (4)

Und jetzt verallgemeinern wir das auf den krummlinigen Fall:

https://youtu.be/FMVwUsuEDD0 (7 min) (5)

---

**Beispiele. . .** auf der Rückseite.

**Beispiele (2D):**

- Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$

$$\text{Volumenelement} \qquad \texttt{https://youtu.be/soMnJgNzFvw} \text{ (3 min)} \tag{6}$$

$$\text{Kreisfläche} \qquad \texttt{https://youtu.be/vNDEo7zICRg} \text{ (2 min)} \tag{7}$$

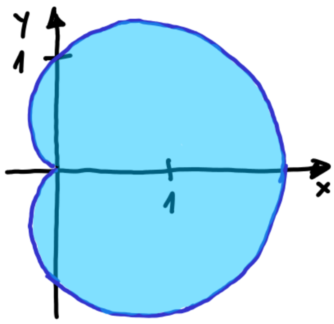
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/Pk9NmKajR7E} \text{ (4 min)} \tag{8}$$

$$\text{Ellipsenfläche} \qquad \texttt{https://youtu.be/sKQSstoWmww} \text{ (3 min)} \tag{9}$$

**Berechnen Sie** die von der Kardioide

$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos\phi)\cos\phi \\ (1+\cos\phi)\sin\phi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \tag{10}$$

eingeschlossene Fläche.




HINWEISE: Verwenden Sie Polarkoordinaten.
Integrieren Sie $r$ von Null bis $1+\cos\phi$. (Warum?)
ERGEBNIS: $\frac{3\pi}{2}$.

---

**Beispiele (3D):**

- Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$

**Bestimmen Sie** das Volumenelement in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \,. \tag{11}$$

$$\text{Kugelvolumen} \qquad \texttt{https://youtu.be/yoxbMFFNlyI} \text{ (4 min)} \tag{12}$$