

## Mathematik 2 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 18 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 05.07.21

---

### 12.3 Integralsätze

Eindimensionale Integrale lösen wir mir dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für höherdimensionale Integrale können wir ähnliche Beziehungen finden. Dazu betrachten wir den Hauptsatz nochmal aus einem anderen Blickwinkel:

$$\text{https://youtu.be/kNYiuspm3yg} \text{ (5 min)} \quad (1)$$

---

#### Satz. (Gaußscher Integralsatz)

Sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  ein geometrischer Körper mit parametrisierter Oberfläche  $\partial K$  (stückweise glatt) und äußerer Normale  $\vec{n}_a$ , und sei  $\vec{f}$  ein stetig diffbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{f} \, dV = \oiint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{n}_a \, dO. \quad (2)$$

Erläuterungen und Begründung:

$$\text{https://youtu.be/5n_hfqUFx-k} \text{ (17 min)} \quad (3)$$

---

#### Beispiele:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \text{ auf Kugel} \quad \text{https://youtu.be/HH88WTpL8WE} \text{ (5 min)} \quad (4)$$

Sei  $W = [0, 1]^3$  der Einheitswürfel mit (stückweise) parametrisierter Oberfläche  $\partial W$  so, dass die Normale  $\vec{n}$  nach außen zeigt. Weiter Sei  $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie  $\int_{\partial W} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dO$ .

---

Mithilfe des Gaußschen Satzes können wir die anschauliche Bedeutung der Divergenz als Quelldichte erkennen:

$$\text{https://youtu.be/njtDrGaJkfI} \text{ (4 min)} \quad (5)$$

---

**Satz. (Stokes'scher Integralsatz in der Ebene)**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  mit stückweise glatter, positiv orientierter, geschlossener Randkurve  $\partial B$  (d.h. das Innere "liegt links" der Kurve), und sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_B \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{\partial B} \vec{v} d\vec{x}. \quad (6)$$

**Beweis:** <https://youtu.be/9WWaRzelvDo> (13 min) (7)

Sein nun  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig diffbares Vektorfeld.

**Überzeugen Sie sich** davon, dass nun

$$\int_B \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \oint_{\partial B} \vec{v} d\vec{x} \quad (8)$$

gilt, wobei  $B$  weiterhin in der  $x_1x_2$ -Ebene liegt. Wie müssen wir dazu die Flächennormale  $\vec{n}$  wählen? HINWEIS: Die Rotation wurde in Aufgabe 31 definiert.