Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

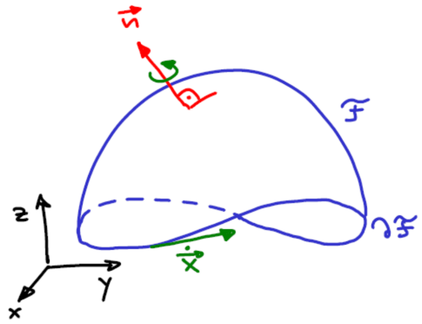
Anleitung 19 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 08.07.21

12.3 Integralsätze (Forts.)

Der Satz von Stokes gilt nicht nur in der Ebene sondern auch im $\mathbb{R}^3$, wie wir heute (29.6.) im Livestream gesehen haben.

Satz. (Stokes'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$)
Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine zweiseitige Fläche, regulär, mit stückweise glatter, geschlossener Randkurve $\partial\mathcal{F}$, die eine Rechtsschraube um die Flächennormale $\vec{n}$ beschreibt, und sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbares Vektorfeld, dann gilt

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{x} \,. \tag{1}$$



Bekannte Spezialfälle:

ebener Stokes	https://youtu.be/Fv3GDwN1RqE (2 min)	(2)
Kurvenintegrale mit Stammfunktion (konservative Vektorfelder)	https://youtu.be/eo0gCixy0Tg (2 min)	(3)

Beispiel: Sei $B = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat mit (stückweise) parametrisiertem Rand ∂B so, dass B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ 3x \end{pmatrix}$.

$$\textbf{Bestimmen Sie} \quad \oint_{\partial B} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{x} \,. \tag{4}$$

Mithilfe des Stokes'schen Satzes können wir die anschauliche Bedeutung der Rotation als Wirbeldichte erkennen:

https://youtu.be/Ge1oU3m_chI (4 min) (5)

---

13 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Zum Aufwärmen schauen wir uns ein bisschen auf www.khanacademy.org um. Einen guten Einstieg bieten z.B. die folgenden *Skills*:

Basic set notation / Subsets of sample spaces / Simple probability / Probabilities of compound events / Independent probability / Dependent probability / Simple hypothesis testing

. . . oder Sie fangen mit dem **Einstufungstest** an.

13.1 Grundbegriffe[1]

Wir bedienen uns der Mengenschreibweise:

Ereignisse und (Teil-)Mengen	https://youtu.be/fHK2aVwP4ko (2 min)	(6)
Potenzmenge und σ-Algebren	https://youtu.be/v-HCBZK8__Q (3 min)	(7)
Mengenoperationen	https://youtu.be/PMwkaZoedsQ (3 min)	(8)

Nun wollen wir Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen:

Wahrscheinlichkeitsmaße und -räume . . . mit Beispielen	https://youtu.be/VKRNu2bOZgo (8 min)	(9)

Jetzt müssen wir oft Dinge abzählen, daher. . .

13.2 Kombinatorik

Anzahl möglicher Anordungen von n (unterschiedlichen) Objekten:

$$n(n-1)\cdots 1 = n! \qquad \text{https://youtu.be/l1\_dbrCbv\_4 (1 min)} \tag{10}$$

Anzahl möglicher Anordungen von n Objekten, die in
j Gruppen mit jeweils k_1, $k_2, \ldots k_j$ gleichen Objekten vorkommen ($k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n$):

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_j!} \qquad \text{https://youtu.be/-ySdGGjHCm8 (3 min)} \tag{11}$$

Urnenmodelle

- Urne mit n unterschiedlichen Kugeln
- Ziehe k Kugeln

Anzahl der möglichen Ergebnisse:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Drei Fälle. . .	https://youtu.be/q5kOirz1USg (4 min)	(12)
. . . und der Vierte.	https://youtu.be/pRA3-_rVkwg (4 min)	(13)

Beispiel: Würfelzwerge!

https://youtu.be/tXHlFDI8yhM (2 min) (14)

Überlegen Sie:

a) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, mit fairen Farbwürfeln die Kombination für einen ein-, zwei- oder dreifarbigen Zwerg zu würfeln?
b) Wieviele ein-, zwei- und dreifarbige Zwerge gibt es jeweils?
c) Wieviele Kärtchen hat das Spiel?

[1] Wenn Sie Theorie nicht so prickelnd finden, können Sie auch erst mal zur Kombinatorik vorspringen, und nur bei Bedarf hier nachschauen – oder Sie gucken sich sogar als erstes die Würfelzwerge an.