Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 20 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 12.07.21

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition: (Bedingte Wahrscheinlichkeit)
Seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$. Wir nennen

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Warum definieren wir das so? https://youtu.be/n41jtHkpB6k (2 min) (2)

Beispiel:

Nochmal Würfeln https://youtu.be/O_lbhfERD90 (3 min) (3)

Definition: (Stochastische Unabhängigkeit)
Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, falls gilt

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)\,.$$

Diese Definition ist gut, weil... https://youtu.be/jyXlkjA87x8 (1 min) (4)

Wir haben bereits gesehen, dass i.A. $P(A|B) \neq P(B|A)$. Mit genügend zusätzlicher Information können wir die beiden aber ineinander umrechnen.

Satz. (Bayes)
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, und sei $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$. Dann gilt für jedes $j = 1, \ldots, n$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)\, P(A_k)}\,. \tag{5}$$

Beweis: https://youtu.be/XCtan0l6leY (8 min) (6)

Beispiel: Antigen(AG)-Schnelltest auf SARS-CoV-2
Bei einem klinischen Test bezeichnet die *Sensitivität* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test Infizierte als infiziert erkennt; die *Spezifität* bezeichnet die Wahrscheinlichkeit

dafür, dass er Nichtinfizierte als nicht-infiziert erkennt. Als *Prävalenz* wird der Anteil der Infizierten an der Bevölkerung (oder einer anderen untersuchten Gruppe) bezeichnet.

Auf dem Beipackzettel eines AG-Schnelltests auf SARS-CoV-2 wird die Sensitivität mit 96,2% angegeben, die Spezifität mit 99,2%. Laut RKI-Lagebericht vom 6.7.21 gibt es in Deutschland aktuell ca. 10 000 aktive Corona-Fälle. Genesen oder vollständig geimpft sind ca. 44% der Bevölkerung. Damit beträgt die Prävalenz unter den Restlichen ca. 0,02%.

Eine zufällig ausgewählte Person (nicht genesen, nicht vollständig geimpft) führt obigen AG-Schnelltest durch. Der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich infiziert ist?

https://youtu.be/4cVDHOMa3lo (7 min) (7)

Ihre Corona-Warn-App schlägt Alarm. Sie hatten Kontakt mit einer akut infizierten Person. Wir nehmen an, Ihr Risiko sich angesteckt zu haben, beträgt 10 %. Sie führen obigen AG-Schnelltest durch, der Test fällt positiv aus. **Überlegen Sie**, wie groß nun die Wahrscheinlichkeit ist, dass Sie infiziert sind.

13.4 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Definition: Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt (reelle) Zufallsvariable (ZV), wenn gilt

$$\big\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\big\} \in \mathcal{A} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Was jetzt, Funktion oder Variable? https://youtu.be/bSoAfAGotz8 (3 min) (9)

Definition: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine ZV. Wir nennen $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F_X(x) = P(X \leq x)$ Verteilungsfunktion von X.

Beispiel: Zweifaches Würfeln inkl. Plot als Stufenfunktion https://youtu.be/TgFQmYjPy2Y (4 min) (10)

Eigenschaften von Verteilungsfunktionen https://youtu.be/qOGmONu1Ft4 (2 min) (11)

Beispiel: Binomialverteilung
Wir sagen X ist binomialverteilt mit Parametern n und p,
und schreiben dafür $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, wenn gilt

$$P(X{=}k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,.$$ https://youtu.be/1JRbFdTBnw4 (5 min) (12)