

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 22 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 19.07.21

13.4.1 Kenngrößen von Zufallsvariablen

Vorbemerkung: Ähnlich wie bei Ereignissen definieren wir für Zufallsvariablen...

(stochastische) Unabhängigkeit <https://youtu.be/TQSS17-9Sz4> (1 min) (1)

Definition: Sei X eine ZV auf (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Ist X diskret, und gilt $\sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i| P(X=x_i) < \infty$, so nennen wir

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X=x_i) \quad \text{den Erwartungswert von } X. \quad (2)$$

- Ist X stetig mit Dichte f_X , und gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$, so nennen wir

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad \text{den Erwartungswert von } X. \quad (3)$$

Beispiele:

Faires Würfeln <https://youtu.be/8oFATL4oUaU> (2 min) (4)

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow E(X) = np \quad (\text{siehe ÜA 49}) \quad (5)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \quad (\text{siehe ÜA 49}) \quad (6)$$

Rechenregeln:

Seien X, Y Zufallsvariablen und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt *immer*

$$E(aX+b) = aE(X) + b \quad \text{und} \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y). \quad (7)$$

Sind X, Y stochastisch *unabhängig*, so gilt außerdem

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y). \quad \text{https://youtu.be/TqjOn5hu0Bo} \quad (4 \text{ min}) \quad (8)$$

Definition: Sei X eine ZV mit Erwartungswert $\mu = E(X)$. Falls $E(X^2)$ existiert, so heißt

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2) \quad \text{Varianz von } X.$$

Bemerkungen:

Wir nennen $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ die **Standardabweichung** von X . (9)

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{https://youtu.be/MI7ZQJkcG0k} \quad (2 \text{ min}) \quad (10)$$

Beispiele:

$$\text{Faires Würfeln} \quad \text{https://youtu.be/8jTSzVASd6k} \quad (3 \text{ min}) \quad (11)$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow \text{Var}(X) = np(1-p) \quad (\text{siehe ÜA 49}) \quad (12)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (\text{siehe ÜA 49}) \quad (13)$$

Rechenregeln:

Seien X, Y Zufallsvariablen und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt *immer*

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X). \quad (14)$$

Sind X, Y stochastisch *unabhängig*, so gilt außerdem:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \quad \text{https://youtu.be/8ScAq--cc8k} \quad (3 \text{ min}) \quad (15)$$

Satz. (Tschebyscheff'sche Ungleichung)

Sei X eine ZV, für die $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ existieren. Dann gilt

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad \forall a > 0. \quad (16)$$

$$\text{Beweis:} \quad \text{https://youtu.be/meeu6uWwoe4} \quad (6 \text{ min}) \quad (17)$$

Überlegen Sie, wie der Beweis für diskrete ZVn geht. HINWEIS: Summen statt Integrale.

13.6 Grenzwertsätze

Schauen Sie zunächst dem schwachen Gesetz der großen Zahlen bei der Arbeit zu.

Satz. (Schwachtes Gesetz der großen Zahlen)

Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZVn, die alle die gleiche Verteilung haben (kurz: iid), mit $E(X_k) = \mu$ und $\text{Var}(X_k) = \sigma^2 \forall k$. Dann gilt für $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Kurz: Der Mittelwert strebt gegen den Erwartungswert.

Relative Häufigkeiten streben gegen Wahrscheinlichkeiten.

$$\text{Beweis:} \quad \text{https://youtu.be/-8Fv9LaugvE} \quad (6 \text{ min}) \quad (18)$$

Und wie schnell geht das? Leider nur proportional zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$, aber immerhin. Und warum? Wir sehen das bereits im Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen. Schärfere Aussagen liefert:

Satz. (Zentraler Grenzwertsatz)

Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZVn, die alle die gleiche Verteilung haben (d.h. iid), mit $E(X_k) = \mu$ und $\text{Var}(X_k) = \sigma^2 \forall k$. Dann gilt für $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sigma}$:

$$Z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{N}(0, 1). \quad (19)$$

(ohne Beweis)

$$\text{Bemerkungen:} \quad \text{https://youtu.be/9PHeA11TVJM} \quad (6 \text{ min}) \quad (20)$$