

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 04.06.2021)

Aufgabe 21

(20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$

b) $7x^2 + 12xy - 2y^2 = 5$

c) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 16$

Aufgabe 22

(3+7 = 10 Zusatzpunkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$.

b) Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a ?

Aufgabe 23¹

(5+3+2 = 10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

- Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} = \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy -Ebene.
- Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
- Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

HINWEIS: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.

¹In dieser Aufgabe üben wir das Visualisieren in mehreren Dimensionen. Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr keine Lösung publiziert.