Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Abgabe 25.06.2021)

Aufgabe 32 (3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \dfrac{e^{-x^2}}{1-y^2}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y,z) = \sin(xz) - \cos(y) + xy(z-1)^{20}$ und $g(x,y) = \dfrac{e^y - x}{1+x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0,-1,1)$ von

$$f(x,y,z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + z + 20\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 33 (8+7 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = (x-y)^4 - 7(x^2+y^2) + 18xy \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = y^2 - y^4 + \sin(x)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 34 (10 Zusatzpunkte)

Ist $y + xy^2 - e^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}\,,$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0,-1)$.

Aufgabe 36 (10 Zusatzpunkte)

Für Umgebungen welcher Punkte (x_0, y_0) lässt sich die Gleichung

$$y^2 = x^3 + x^2$$

jeweils lokal nach y auflösen? Und wo lässt sie sich lokal nach x auflösen? Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einem Diagramm.