

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 02.07.2021)

Aufgabe 37

(10 Punkte)

Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?¹ Berechnen Sie auch $f^{-1}(-3, 0, 0)$; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben (d.h. aus welchem Bereich bei Ihnen r , ϑ und φ stammen).

Aufgabe 38

(15 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2 - 2x + 4y}$.

- Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f .
- Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 9$. Entscheiden Sie, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt.
- Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. Bestimmen Sie $\max_{(x,y) \in D} f(x, y)$ und $\min_{(x,y) \in D} f(x, y)$.

HINWEIS: Denken Sie neben dem Satz auf Anleitung 14 auch an den Satz aus Anleitung 9.

Aufgabe 39

(10 Zusatzpunkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 y^2$. Bestimmen Sie Minimum und Maximum von f auf $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wo werden Minimum und Maximum angenommen?

Aufgabe 40

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0, 1]^3$ mit Dichte

$$f(x, y, z) = x^2 y e^{xyz} + z e^{xz},$$

d.h. berechnen Sie $m = \int_W f \, dV$.

¹Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$?