

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 10 (Abgabe 09.07.2021)

Aufgabe 42

(10 Zusatzpunkte)

- a) Berechnen Sie das Volumen $|E| = \int_E dV$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

- b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ positiv definit und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \leq 1\}$. Bestimmen Sie $|K|$.
HINWEIS: Laut des Satzes auf Anleitung 6 (HAT) existiert eine orthogonale Matrix U , so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich also an.

Aufgabe 43 (Zylinderkoordinaten)

(10 Punkte)

- a) Berechnen Sie das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z : \text{kartesisch}),$$

- b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \right\}.$$

und zeichnen Sie P .

Aufgabe 44

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S ohne Verwendung eines Integralsatzes.

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $dx dy = r dr d\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 45

(10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen des Torus¹

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\},$$

d.h. berechnen Sie $\int_T dV$. Bestimmen Sie auch seine Oberfläche, d.h. $\int_{\partial T} dO$, wobei

$$\partial T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2} \sin u) \cos v \\ (1 + \frac{1}{2} \sin u) \sin v \\ \frac{1}{2} \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\}.$$

¹vgl. Aufgabe 23. Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr kein Lösungsvideo publiziert.