

## Mathematik II für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 12 (Abgabe 23.07.2021)

### Aufgabe 51 (Simpsons Paradoxon)

(15 Punkte)

Die folgende Tabelle nennt die Zahlen von Bewerber\*innen und davon als Student\*innen Zugelassenen für zwei verschiedene Studiengänge in Berkeley im Jahr 1973.<sup>1</sup>

Studiengang	männlich		weiblich	
	Bewerber	Zugelassene	Bewerberinnen	Zugelassene
I	825	511	108	89
II	373	22	341	24

Wir wählen aus der Menge aller Bewerber\*innen eine Person zufällig aus, wobei jede Person die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ausgewählt zu werden. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

$W$  = Die Person ist weiblich.

$M = W^c$  = Die Person ist männlich.

$I$  = Die Person hat sich für den Studiengang I beworben.

$II = I^c$  = Die Person hat sich für den Studiengang II beworben.

$Z$  = Die Person wurde zum Studium zugelassen.

- a) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie diese in Worten. (Beispiel:  $P(M|Z) = 0,8251$  bedeutet: "82,51% der Zugelassenen sind männlich.")

(i)  $P(W)$  und  $P(M)$ .

(ii)  $P(Z|W)$  und  $P(Z|M)$ .

Wer scheint bevorzugt zugelassen zu werden, Männer oder Frauen?

- b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie diese in Worten.

(i)  $P(Z|W \cap I)$  und  $P(Z|M \cap I)$ .

(ii)  $P(Z|W \cap II)$  und  $P(Z|M \cap II)$ .

Wer scheint bevorzugt zugelassen zu werden, Männer oder Frauen?

- c) Berechnen Sie

(i)  $P(Z|I)$  und  $P(Z|II)$  sowie

(ii)  $P(I|W)$  und  $P(I|M)$ ,

und erklären Sie, wie sich der (scheinbare) Widerspruch zwischen (a) und (b) auflösen lässt.

<sup>1</sup>P. Bickel, E. A. Hammel, J. W. O'Connell, *Sex bias in graduate admissions: Data from Berkeley*, Science **187** (1975) 398–404.

### Aufgabe 52

(15 Punkte)

In der Zulassungsstudie für einen neuen Impfstoff wurde die Impfung an 1130 Personen getestet. Dabei traten in keinem Fall schwere Nebenwirkungen auf.

- a) Sie möchten ermitteln, wie (un)wahrscheinlich schwere Nebenwirkungen auf der Basis obiger Daten sind. Nehmen Sie dazu an, bei der Impfung trete mit Wahrscheinlichkeit  $w$  eine (hypothetische) schwere Nebenwirkungen auf. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Zulassungsstudie keine schweren Nebenwirkungen beobachtet werden?

Professor M. sagt dazu: "Risiken, die seltener als 1:100 sind, lassen sich mit so einer Studie nicht abbilden." Führen Sie Hypothesentests durch, um diese Aussage einzuordnen.

- b) Wählen Sie einmal  $H_0 : w = 0,01$ ,  $H_A : w < 0,01$  (warum?) und Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ . Als Teststatistik wählen Sie die Anzahl der Teilnehmer\*innen der Zulassungsstudie, bei denen schwere Nebenwirkungen auftraten.
- c) Wiederholen Sie den Hypothesentest mit  $H_0 : w = 0,001$  und entsprechend angepasstem  $H_A$ .
- d) Bestimmen Sie außerdem ein einseitiges 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit  $w$  im Sinne der obigen Tests.
- e) Bestimmen Sie zusätzlich ein 99%-Vertrauensintervall für  $w$  im Sinne der obigen Tests.
- f) Erklären Sie die Aussage von Prof. M.

### Aufgabe 53

(10 Zusatzpunkte)

Lesen Sie den nebenstehenden Comic. Nehmen Sie an, dass Jelly Beans keine Akne verursachen – und zwar unabhängig von der Farbe. Nehmen Sie weiter an, dass bei den farbspezifischen Tests, die Wahrscheinlichkeit, eine wahre Nullhypothese zu verwerfen, jeweils 5% betrug. (Warum?)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der zwanzig (wahren) Nullhypothesen verworfen wird? Welche Konsequenzen hat diese Beobachtung für den Umgang mit p-Werten und Hypothesentests im Wissenschaftsalltag?



[xkcd.com/882](http://xkcd.com/882)