Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 29.07.2021

- ▶ Drucken Sie die Klausur aus (einseitig).
- ▶ Tragen Sie im Abschnitt *Erklärung* Vorname, Name und Matrikelnummer ein.
- ▶ Wenn Sie keinen Drucker benutzen können oder möchten, dann schreiben Sie den Abschnitt *Erklärung* ab, und schreiben Sie die Aufgabenstellungen (oder zumindest die Formeln daraus) ab – jede Aufgabe auf eine eigene Seite!
- ▶ Tragen Sie bei *Beginn* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Bearbeiten Sie die Klausur. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- ▶ Beenden Sie nach spätestens 120 Minuten die Bearbeitung.
  Tragen Sie bei *Ende* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Unterschreiben Sie den Abschnitt *Erklärung*.
- ▶ Scannen Sie die Erklärung. Scannen Sie Ihre Lösungen – je ein Dokument pro Aufgabe, auch unbearbeitete Aufgaben!
- ▶ Laden Sie die Erklärung wie angegeben hoch. Laden Sie Ihre Lösungen wie angegeben hoch – auch unbearbeitete Aufgaben!

Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Viel Erfolg!

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 20**

Erklärung

Vorname: ________________________ Name: ________________________________

Matrikelnummer: ____________________

Beginn: ___________________ Ende: ___________________

Ich bestätige, dass ich diese Klausur ohne fremde Hilfe und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet habe.

Datum, Unterschrift: ____

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 21**

Aufgabe 1 (1+8+8 = 17 Punkte)

Sei $S_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Berechnen Sie S_0.

b) Zeigen Sie $S_n = \dfrac{2n-1}{2n}\,S_{n-1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Partielle Integration.

Bestimmen Sie damit S_1 und S_2.

c) Berechnen Sie

$$\int_1^\infty \frac{2-3x}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 22**

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $2\,y'\,y - 5 = 0,\ y(0) = -3.$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 23**

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' - 4y = 0$.

b) Lösen Sie das AWP $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 24**

Aufgabe 4 (8+2+3 = 13 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.

c) Bestimmen Sie $(A^{10} - A^9)\vec{x}$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 25**

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ schiefhermitesch, d.h. $\overline{A}^T = -A$. Gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $\overline{U}^T A U$ diagonal ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Die Matrix $B = \mathrm{i}A$ ist nützlich.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 26**

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$13x^2 - 8xy + 7y^2 = 5$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 27**

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (y^3 - 3y)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = (0, 0)$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen, und geben Sie die Funktionswerte an.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 28**

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $f(\vec{x}) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie

$$\int_{|\vec{x}|\leq 1} f \ \mathrm{d}V \,.$$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 29**

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Sei

$$\mathfrak{K}: \; \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

und sei $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{x}$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 30**

Aufgabe 10 (1+3+1+2+3 = 10 Punkte)

Ein Impfstoff gegen eine neuartige Infektionskrankheit wurde an 100 Personen getestet, die dann drei Monate lang beobachtet wurden. Keine der Personen erkrankte in dieser Zeit an der neuartigen Krankheit. Wir möchten aufgrund dieser Beobachtungen Aussagen über die Wahrscheinlichkiet w machen, mit der geimpfte Personen drei Monate nach der Impfung nicht erkranken. Dazu testen wir die Nullhypthese $H_0 : w = w_0$ gegen die Alternativhypothese $H_A : w > w_0$.

a) Wählen Sie eine geeignete Teststatistik X. Beschreiben Sie sie in einem Satz.

b) Wie ist X unter H_0 veteilt?

c) Welcher Wert von X wurde beobachtet?

d) Bestimmen Sie den p-Wert des Tests.

e) Bestimmen Sie, im Sinne dieses Tests, das 95%-Vertrauensintervall für w.