Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2021

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 19.10.2021

- ▶ Drucken Sie die Klausur aus (einseitig).
- ▶ Tragen Sie im Abschnitt *Erklärung* Vorname, Name und Matrikelnummer ein.
- ▶ Wenn Sie keinen Drucker benutzen können oder möchten, dann schreiben Sie den Abschnitt *Erklärung* ab, und schreiben Sie die Aufgabenstellungen (oder zumindest die Formeln daraus) ab – jede Aufgabe auf eine eigene Seite!
- ▶ Tragen Sie bei *Beginn* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Bearbeiten Sie die Klausur. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- ▶ Beenden Sie nach spätestens 120 Minuten die Bearbeitung.
  Tragen Sie bei *Ende* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Unterschreiben Sie den Abschnitt *Erklärung*.
- ▶ Scannen Sie die Erklärung. Scannen Sie Ihre Lösungen – je ein Dokument pro Aufgabe, auch unbearbeitete Aufgaben!
- ▶ Laden Sie die Erklärung wie angegeben hoch. Laden Sie Ihre Lösungen wie angegeben hoch – auch unbearbeitete Aufgaben!

Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Viel Erfolg!

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 40**

Erklärung

Vorname: ______________________ Name: ______________________________

Matrikelnummer: ___________________

Beginn: __________________ Ende: __________________

Ich bestätige, dass ich diese Klausur ohne fremde Hilfe und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet habe.

Datum, Unterschrift: ______________________________________

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 41**

Aufgabe 1 (4+5+8 = 17 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{3x+1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$ Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 42**

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = \dfrac{2}{y}$, $y(0) = -3$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 43**

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' - 9y = 0$.

b) Lösen Sie das AWP $y'' - 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 44**

Aufgabe 4 (8+2+3 = 13 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.

c) Bestimmen Sie $(A^{10} - A^9)\vec{x}$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 45**

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ und sei 5 ein Eigenwert von AB.
Zeigen Sie, dass 5 dann auch Eigenwert von BA ist.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 46**

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$11x^2 + 16xy - y^2 = 5$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 47**

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (y^3 - 3y)(x^2 + 1)\,.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = (0, 0)$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen, und geben Sie die Funktionswerte an.

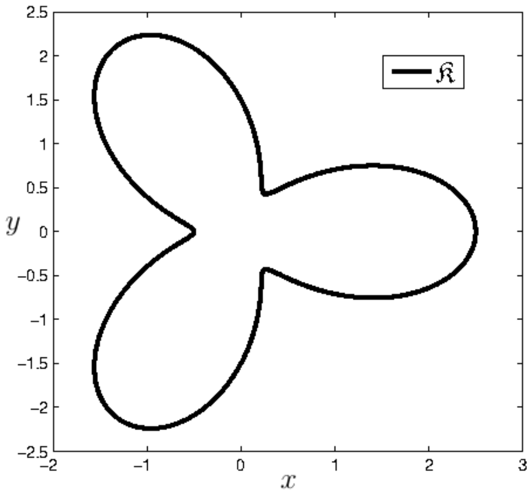
Aufgabe 8 (8 Punkte)

Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2} + \cos(3t)) \cos t \\ (\frac{3}{2} + \cos(3t)) \sin t \end{pmatrix},$$

$$0 \le t < 2\pi\,,$$

eingeschlossenen Fläche.



Hinweis: Polarkoordinaten sind hilfreich, und Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \pi$ verwenden.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 49**

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Gegeben sei das Rechteck

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

mit (stückweise) parametrisiertem Rand ∂B so, dass B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 3y \\ x^3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial B} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$. Hinweis: Ein Integralsatz ist hilfreich.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 50**

Aufgabe 10 (1+1+1+1+5+1 = 10 Punkte)

Ein Impfstoff gegen eine neuartige Infektionskrankheit wird in großer Zahl eingesetzt, 65% der Bevölkerung sind bereits geimpft. Es treten sogenannte Impfdurchbrüche auf, d.h. Personen erkranken trotz Impfung. Innerhalb des letzten Monats waren 10% der Erkrankten geimpft.

Wir wählen aus der Gesamtbevölkerung zufällig eine Person aus (jede mit der gleichen Wahrscheinlichkeit), und definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} G &= \text{Die ausgewählte Person ist geimpft.} \\ E &= \text{Die ausgewählte Person ist innerhalb des letzten Monats} \\ &\quad\ \text{an der Infektionskrankheit erkrankt.} \end{aligned}$$

Geben Sie an, bzw. bestimmen Sie:

a) $P(G)$

b) $P(G^c)$

c) $P(G|E)$

d) $P(G^c|E)$

e) $\dfrac{P(E|G)}{P(E|G^c)}$

f) Wie viel mal wahrscheinlicher ist es für Ungeimpfte zu erkranken, als für Geimpfte?