In 1d: $\exists_1$ Art zu differenzieren $f'(x)$

und zu integrieren $\int_a^b f(x)\,dx$

$d>1$: mehr, allg $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Spezielle relevante Komb.:

$\longrightarrow$ $(m=n)$ Vektorfeld $\quad \mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot f$

$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\longrightarrow$ $(m=n=3)$ $\quad \mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} = \nabla \times f$

$\rightarrow (m=n)$

$$(\mathrm{rot}(f))_{ij} = \partial_i f_j - \partial_j f_i$$

antisymm. $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

allg. $\dfrac{n(n-1)}{2}$

$\rightarrow (n=1)$, $\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$

Skalarfeld

Weisen zu integrieren:

→ Volumenintegral

$$\int_{\mathbb{R}^m} dV\, f(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} d\underline{x}\, f(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} d^m\underline{x}\, f(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} dx_1 dx_2 \cdots dx_m\, f(\underline{x})$$

→ Kurvenintegral = Wegintegral $(m = n)$

$$\int_\gamma \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} \qquad \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

→ Flächenintegral $\int_F \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{S}$

$(m = n)$, F $n-1$ dim F

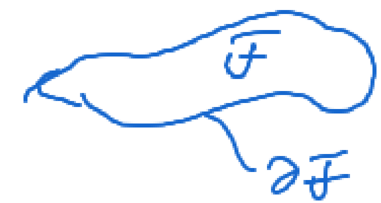
Beziehungen:

→ Integralsatz von Ostrogradski – Gauß
(Divergenzsatz) $(m = n = \dim V,\ V \subseteq \mathbb{R}^n)$

$$\int_V d^n\underline{x}\ \mathrm{div}\, \underline{f}(\underline{x}) = \int_{\partial V} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{S}$$

$\partial V \leftarrow$ Rand

→ Integralsatz von Stokes $(m = n = 3)$

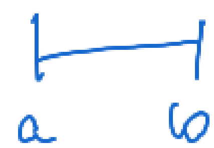


$$\int_F \mathrm{rot}\, \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{S} = \int_{\partial F} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

→ Integralsatz von Green $(m = n = 2)$ = Gauß = Stokes

$\rightarrow$ vgl. in $m = n = 1$

„Hauptsatz"
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$



$$= \sum_{x \in \text{Rand}} f(x) \cdot \text{Vorzeichen}$$

Kap. 1: Kurvenintegrale

1.1 Def • Kurve = Parameterdarstellung einer Kurve

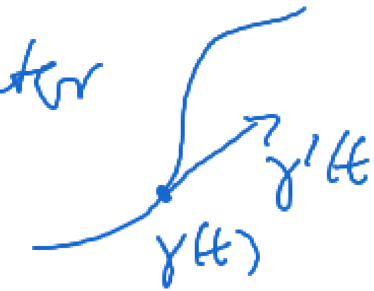
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig

$\Gamma := \operatorname{Im}(\gamma)$ „Spur der Kurve"

$= \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$.

- **C^1-Kurve** $\iff$ γ st. diffbar

$\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ Geschw. vektor, auch Tangentialvektor



- $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$ Länge der Kurve

$\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (u_1 \dots u_n)^T$

- **Konkatenation** für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\delta : [b,c] \to \mathbb{R}^n$

mit $\gamma(b) = \delta(b)$ sei $\gamma + \delta : [a,c] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & t \leq b \\ \delta(t) & t \geq b \end{cases}$

$\left(\neq \gamma(t) + \delta(t) \right)$

ist stetig, also Kurve

- γ heißt <u>stückweise C^1</u> $:\Longleftrightarrow$ $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$ mit $\gamma_i \in C^1$

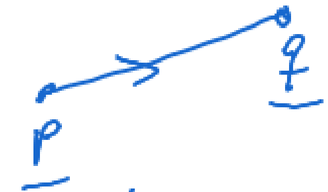
$\Longleftrightarrow \exists\, a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r = b :$

$\forall i \in \{1 \ldots r\} : \underbrace{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}}_{\gamma_i} \in C^1$

Dann <u>Länge</u> $\ell(\gamma) = \sum_{i=1}^{r} \ell(\gamma_i)$

1.2 Bsp

a) Strecke $[\underline{p}, \underline{q}]$, $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{R}^n$



$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \underline{p} + t(\underline{q} - \underline{p}) = t\underline{q} + (1-t)\underline{p}$$

ist C^1 mit $\gamma'(t) = \underline{q} - \underline{p}$ $\forall t \in [0,1]$ und

$$l(\gamma) = \int_0^1 \| \underline{q} - \underline{p} \|_2 \, dt = \| \underline{q} - \underline{p} \|_2 .$$

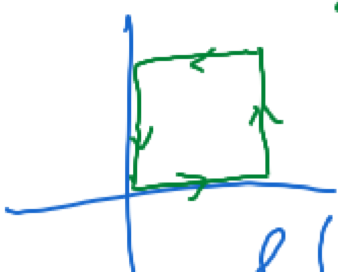
b) Kreis vom Radius $r > 0$ um $\underline{p} \in \mathbb{R}^2$ ist Spur der C^1-Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \underline{p} + \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(t)\| = r$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} r\,dt = r2\pi$$

c) $\partial [0,1]^2$



stückw. C^1-Kurve

$$\ell(\gamma) = 4$$

d) Helix = Schraubenlinie

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\ell\left(\gamma|_{[0,2\pi n]}\right) = \int_0^{2\pi n} dt \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \underset{1}{\cancel{t^2}}}$$

n Windungen

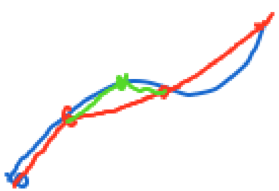
$$= 2\pi\sqrt{2}\, n$$

1.3 Bem

Allg. Def. für $\gamma \in C^0 \setminus C^1$

$$\ell(\gamma) := \sup\Big\{ \ell\big(\text{Polygonzüge } \gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \; :$$



γ

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b \Big\} \in [0, \infty]$$

Stimmt für stückweise C^1-Kurven mit unserer Def. überein (statt Beweis, t_i äquidistant, $t_i = a + i\Delta t$, $\Delta t = \frac{b-a}{r}$

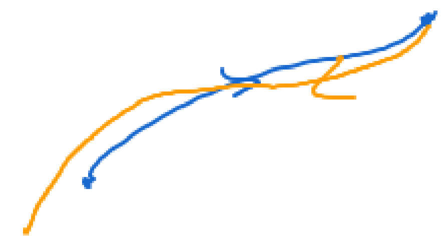
$$\ell(\text{Poly}) = \sum \left\| \frac{\gamma(t_{i-1}+\Delta t) - \gamma(t_{i-1})}{\Delta t} \right\| \Delta t \xrightarrow{\Delta t \to 0} \int_a^b \|\gamma'\| \, dt$$
)

1.4 Def

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

stückweise C^1 heißen äquivalent $:\Longleftrightarrow$

$\exists$ bij C^1: $\varphi : [a,b] \to [c,d]$



mit $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

und $\gamma = \delta \circ \varphi$ Umparametrisierung

Wenn $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \Rightarrow \gamma$ und δ haben dieselbe Orientierung

Wenn $\varphi'(t) < 0 \quad \forall t \Rightarrow \gamma$ und δ haben entgegengesetzte Or.

Bsp: $[a,b]=[1,2]$

$[c,d]=[1,4]$

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\delta(s)=\begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ s \end{pmatrix}$$

$$s=\varphi(t)=t^2$$

$$\delta(\varphi(t))=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}=\gamma(t)$$

für $t>0$ d.h. Ok.

1.5 Lemma Äq. Kurven haben gleiche Länge.

Bew $\ell(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$

$$=\int_a^b \|(\delta\circ\varphi)'(t)\|\,dt$$

$$=\int_a^b \left\| \frac{d\delta}{ds}(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right\| dt \qquad \varphi'(t)>0 \quad \varphi'(t)<0$$

$$=\pm\int_a^b \left\|\frac{d\delta}{ds}(\varphi(t))\right\| (\pm\varphi'(t))\,dt$$

$s=\varphi(t)$

$$=\pm\int_{c}^{d} \left\|\frac{d\delta}{ds}(s)\right\| ds=\ell(\delta) \qquad \square$$

1.6 Bem

Param. durch Bogenlänge

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1, $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$$

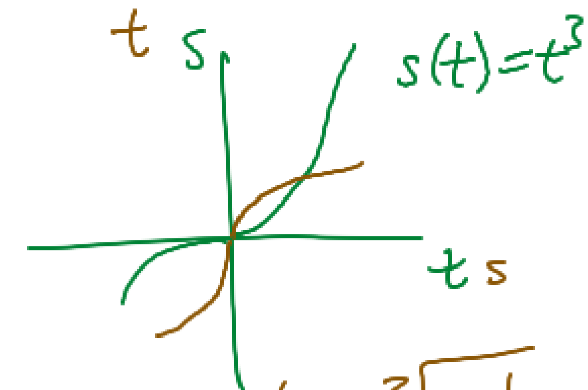
ist C^1 mit $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$

$\Rightarrow$ s streng wachsend

$\Rightarrow$ $\exists\, s^{-1} : [0, \ell(\gamma)] \to [a,b]$ ist C^1

$\Rightarrow$ $\tilde\gamma = \gamma \circ s^{-1}$ ist C^1 und äq zu γ

$$\|\tilde\gamma'(s)\| = \|\gamma'(s^{-1}(s)) \cdot (s^{-1})'(s)\| = \|\gamma'(s^{-1}(s))\| \frac{1}{s'(s^{-1}(s))} = 1.$$



$$\begin{cases} -\sqrt[3]{|s|} & s \leq 0 \\ \sqrt[3]{s} & s \geq 0 \end{cases}$$

1.7 Bem

$$-\gamma(t) := \gamma(a+b-t)$$

$$-\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$-\gamma$ ist äq. zu γ mit entgegeng. Or.

Kurvenintegrale

1.8 Def Für C^1-Kurve γ und st. Vektorfeld $\underline{f} : \text{Spur}\,\gamma \to \mathbb{R}^n$

ist das Kurvenint.

$$\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{x} = \int_\gamma \sum_{i=1}^n f_i\, dx_i := \int_a^b dt\; \underline{f}(\underline{\gamma}(t))\cdot \underline{\gamma}'(t)$$

Für ein Skalarfeld $f : \mathrm{Spur}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$

ist das <u>skalare Kurvenintegral</u>

$$\int_\gamma f \, ds := \int_a^b dt \; f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| .$$

- $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_r$ stückw. C^1

$$\Rightarrow \int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} := \sum_{j=1}^{r} \int_{\gamma_j} \underline{f} \cdot d\underline{x} \quad \text{etc.}$$

1.10 Bsp

Arbeit: $\underline{f}$ = Kraftfeld verrichtet am Massenpunkt, der sich entlang γ bewegt, die Arbeit

$$\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}$$

1.11 Bsp

Masse eines Drahtes, ρ = Massendichte

$$\rightsquigarrow \quad m = \int_\gamma \rho \, ds \, .$$