$$\int_\gamma f(\underline{x})\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt \quad \text{sk. Weg int.}$$

$$\int_\gamma \underline{f}(\underline{x})\cdot d\underline{x} = \int_a^b \underline{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \quad \text{vekt. Weg int.}$$

1.13 Prop (Invarianz unter Umpara.)

Seien $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\delta:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ äq. stückw. C^1-Kurven, $\Gamma = \operatorname{Spur}\gamma = \operatorname{Spur}\delta$, $\varepsilon := \begin{cases} +1 & \text{gleiche Or.} \\ -1 & \text{entg. Or.}\end{cases}$

a) $\underline{f}:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ st. $\Rightarrow$ (1) $\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{x} = \varepsilon\int_\delta \underline{f}\cdot d\underline{x}$

(2) $\left|\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{x}\right| \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \int_\gamma \|\underline{f}\|\,ds \leq \ell(\gamma)\sup_{x\in\Gamma}\|\underline{f}(x)\|.$

(3) $\displaystyle\int_{\kappa+\omega} \underline{f}\cdot d\underline{x} = \int_{\kappa} \underline{f}\cdot d\underline{x} + \int_{\omega} \underline{f}\cdot d\underline{x}$

b) $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ st. $\Rightarrow$

(1') $\displaystyle\int_{\gamma} f\,ds = \int_{\gamma} f\,ds$

(2') $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f\,ds\right| \le \int_{\gamma} |f|\,ds \le \ell(\gamma)\sup_{\underline{x}\in\Gamma} |f(\underline{x})|$

(3') $\displaystyle\int_{\kappa+\omega} f\,ds = \int_{\kappa} f\,ds + \int_{\omega} f\,ds.$

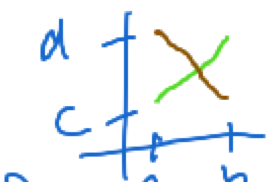
Beweis (3) $\Leftarrow$ Def. und $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt + \int_{t_2}^{t_3} g(t)\,dt$

$$= \int_{t_1}^{t_3} g(t)\,dt \quad \text{für } t_1 < t_2 < t_3 .$$

(1): $\gamma = \delta \circ \varphi \Rightarrow \int_\gamma \underline{f} \cdot dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_a^b \underline{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

$$\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \int_a^b \underline{f}(\delta(\underbrace{\varphi(t)}_{s})) \cdot \delta'(\varphi(t))\, \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{ds}, \quad \varphi(t) = s$$

$$\stackrel{\text{Subst.r.}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underline{f}(\delta(s)) \cdot \delta'(s)\, ds$$



$$= \varepsilon \int_c^d \underline{f}(\delta(s)) \cdot \delta'(s)\,ds = \varepsilon \int_\delta \underline{f} \cdot dx$$

(2) $\left|\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{x}\right| \overset{\text{Def}}{=} \left|\int_a^b \underline{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right|$

$$\leq \int_a^b \left|\underline{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right| dt$$

[Cauchy-Schwarz-Ungl: $|\underline{u}\cdot\underline{v}| \leq \|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|$]

$$\leq \int_a^b \|\underline{f}(\gamma(t))\|\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_\gamma \|\underline{f}\|\,ds \leq \int_\gamma \left(\sup_{\underline{x}\in\Gamma}\|\underline{f}(\underline{x})\|\right) ds = \ell(\gamma)\sup_{\underline{x}\in\Gamma}\|\underline{f}(\underline{x})\|$$

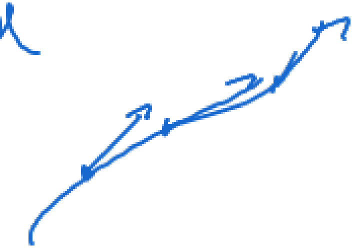
b) analog.

$\square$

1.14 Bem Für C^1 γ mit $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$ ist

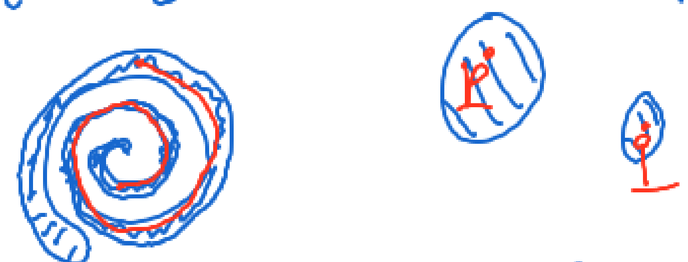
$$\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_\gamma (\underline{f} \cdot \underline{T}) \, ds \qquad \left(\text{„} d\underline{x} = \underline{T} \, ds \text{"} \right)$$

mit $$\underline{T} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$ Einheits-Tangential-Vektorfeld



Konservative Vektorfelder

1.16 Def a) $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>wegzusammenhängend</u> (pathwise connected) $\iff$ $\forall \underline{p}, \underline{q} \in G$ $\exists$ Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = \underline{p}$ und $\gamma(b) = \underline{q}$.



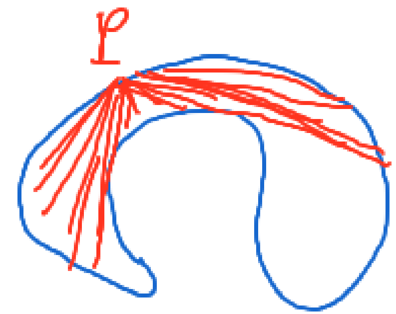
ja nein

b) G heißt Gebiet $\iff$ offen und wegzsh.

c) G heißt <u>sternförmig</u> $\Leftrightarrow$ $\exists \underline{p} \in G \ \forall \underline{q} \in G$:

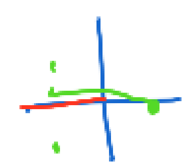
$$\overline{\underline{p}\,\underline{q}} = Sp[\underline{p},\underline{q}] \subseteq G.$$

ja



nein

<u>Bspe</u> c) Konvexe Mengen ($\forall \underline{p},\underline{q} \in G$: $\overline{\underline{p}\,\underline{q}} \subseteq G$)
sind sternförmig

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \binom{x}{0} : x \leq 0 \right\}$  ist sternförmig aber nicht konvex

c) offene sternförmige Mengen sind Gebiete

d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ ist Gebiet, aber nicht sternförmig

1.18 Lemma G Gebiet $\Rightarrow \forall \underline{p}, \underline{q} \in G$

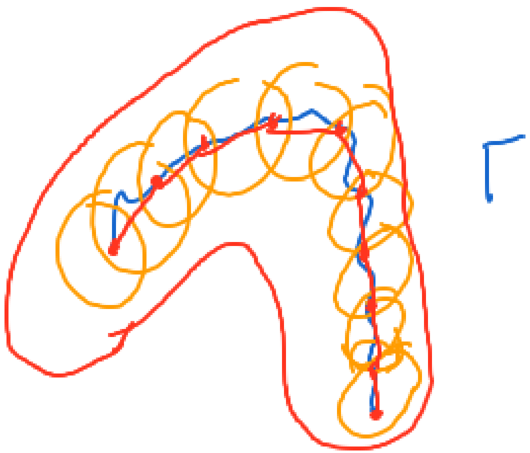
$\exists$ stückw. C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = \underline{p}$, $\gamma(b) = \underline{q}$.

Bew $\Gamma = \text{Spur}\,\gamma_{st}$ ist kompakt (weil $f(\text{komp}) = \text{komp}$ wenn f st.)

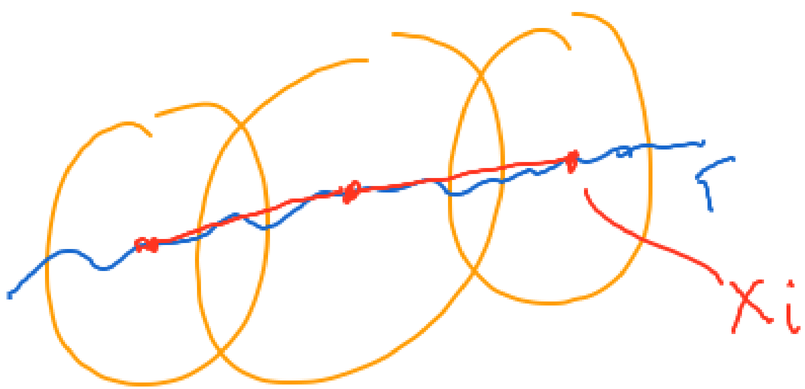
G offen $\Rightarrow \forall x \in \Gamma \; \exists \varepsilon_x > 0 : U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq G$

offene Überdeckung $\Gamma \subseteq \bigcup_{x \in \Gamma} U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq G$

$\Rightarrow \exists$ endl. Teilüberdeckung $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq G$



$\gamma :=$ Polygonzug stückw. C^1 in G in $\bigcup_{i=1}^{m} U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$.



$\square$

1.19 Def

Sei G Gebiet $\subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{f}: G \to \mathbb{R}^n$ st VF

a) $\underline{f}$ heißt ein Gradientenfeld $\iff \exists F: G \to \mathbb{R}$,

$F \in C^1$, $\underline{f} = \nabla F$.

b) $\underline{f}$ heißt konservativ oder wegunabhängig $\iff$

$\forall$ stückw. C^1-Kurven γ, δ in G von $\underline{p}$ nach $\underline{q} \in G$:

$$\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_\delta \underline{f} \cdot d\underline{x}. \quad \left(\text{Dann } \int_{\underline{p}}^{\underline{q}} \underline{f} \cdot d\underline{x} := \int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}\right)$$

1.20 Lemma

Sei G Gebiet, $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$ st. $\quad \underline{f}$ kons. $\iff$

$\underbrace{\forall \text{ geschl.}}_{\gamma(b)=\gamma(a)}$ stückw. C^1-Kurve γ in G: $\quad \displaystyle\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} = 0$

<u>Bew</u> "$\Rightarrow$": γ geschl., $\delta :=$ konst. Weg in $\gamma(b) = \gamma(a) = \delta(t)$

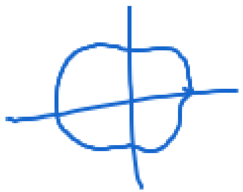
dann $\displaystyle\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_\delta \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_a^b \underline{f}(\delta(t)) \cdot \underbrace{\delta'(t)}_{0} \, dt = 0.$

"$\Leftarrow$": γ, δ von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$, dann $\gamma - \delta$ geschl.,

also $\displaystyle 0 = \int_{\gamma-\delta} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} - \int_{+\delta} \underline{f} \cdot d\underline{x}$ $\quad \square$

Bsp $\underline{A}$ aus ÜA2.

VF auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$



$$\int_\gamma \underline{A} \cdot d\underline{x} = 2\pi b \neq 0 \quad (b \neq 0)$$

$$\underline{A} = \frac{b}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

also $\underline{A}$ nicht kons.

Bem (Bew: ÜA3) sei $F \in C^1(G, \mathbb{R})$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet:

$$\nabla F = 0 \iff F = \text{const.}$$

Bem Falls G nicht wegzsh.,

$\nabla F = 0 \Rightarrow$ F lok. konst.

Korollar Stammfkt ist eind. bis auf Add. einer Konst., d.h. Falls $\underline{f} = \nabla F$ dann $\{\text{Stammfkt}\} = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$

1.23 Satz

Sei G Gebiet, $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$ st., $\underline{p} \in G$

$\underline{f}$ kons. $\iff$ $\underline{f}$ ist Gradient

In dem Fall ist $\underline{y} \longmapsto \int_{\underline{p}}^{\underline{y}} \underline{f} \cdot d\underline{x} =: F(\underline{y})$ ~~ist~~ eine Stammfkt, und

$\forall$ Stammfunktionen F gilt $\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

1,24 Satz (Integrabilitätskriterium)

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\underline{f}: G \to \mathbb{R}^n$ C^1

a) Wenn $\underline{f}$ Gradientenfeld, dann

$$(*) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \forall i,j \in \{1 \dots n\}$$

b) Wenn $(*)$ und G sternförmig ist, dann ist $\underline{f}$ Gradientenfeld.