## 1.23 Satz

$\underline{f}$ kons. $\iff$ $\underline{f}$ gradient

Bew "$\Leftarrow$": Wenn $\underline{f} = \nabla F$ und $\gamma$ $C^1$, dann

$$\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b dt\, \underline{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \int_a^b dt\, \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b dt\, \frac{d F(\gamma(t))}{dt} \overset{HS}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

auch für stückw. $C^1$ $\gamma$ $\Rightarrow$ kons.

"$\Rightarrow$": Sei $\underline{f}$ konv.,
$\underline{p} \in G$ fest

$$F(\underline{x}) := \int_{\underline{p}}^{\underline{x}} \underline{f} \cdot d\underline{x}$$

entl. bel. stw. $C^1$-Wegs $\gamma$ von $\underline{p}$ nach $\underline{x}$
(ex. wg. Lemma 1.18)

$F: G \to \mathbb{R}$ ist definiert.

Zeige $\nabla F = \underline{f}$. Sei $\underline{x}_0 \in G$. $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\underline{x}_0) \subseteq G$
$\forall \underline{x} \in U_\varepsilon(\underline{x}_0)$ sei $\delta_{\underline{x}} := \overline{\underline{x}_0 \underline{x}}$, $\gamma_{\underline{x}_0} + \delta_{\underline{x}}$ ist stw. $C^1$ von $p$ nach $\underline{x}$. $\underline{f}$ konv $\Rightarrow$ $F(\underline{x}) = \int_{\underline{p}}^{\underline{x}} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_{\gamma_{\underline{x}_0} + \delta_{\underline{x}}} \underline{f} \cdot d\underline{x}$

$$= \int_{\gamma_{\underline{x}_0}} \underline{f} \cdot d\underline{x} + \int_{\delta_{\underline{x}}} \underline{f} \cdot d\underline{x} = F(\underline{x}_0) + \int_{\delta_{\underline{x}}} \underline{f} \cdot d\underline{x}.$$

Bew $F(\underline{x}) =$

$$F(\underline{x}_0) + \underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \rho(\underline{x})$$

mit $$\frac{\rho(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \xrightarrow{\underline{x} \to \underline{x}_0} 0$$

Wir haben $$\rho(\underline{x}) = \int_{\delta_{\underline{x}}} \underline{f} \cdot d\underline{x} - \underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

$$= \int_0^1 dt\, \underline{f}(\delta_{\underline{x}}(t)) \cdot \underbrace{\delta_{\underline{x}}'(t)}_{\underline{x} - \underline{x}_0} - \int_0^1 dt\, \underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

$$= \int_0^1 dt \left[ \underline{f}(\underline{x}_0 + t(\underline{x} - \underline{x}_0)) - \underline{f}(\underline{x}_0) \right] \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

also $\dfrac{|\rho(\underline{x})|}{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}$

$$\leq \frac{\int_0^1 dt \left| \left[\underline{f} \quad - \underline{f} \quad \right] \cdot (\underline{x}-\underline{x}_0) \right|}{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}$$

Cauchy-Schwarz-Ungl. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$

$$\leq \frac{\int_0^1 dt \, \|\underline{f}(\underline{x}_0+t(\underline{x}-\underline{x}_0)) - \underline{f}(\underline{x}_0)\| \, \cancel{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}}{\cancel{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}}$$

$\leq \sup \{ \|\underline{f}(\underline{y}) - \underline{f}(\underline{x}_0)\| : \|\underline{y}-\underline{x}_0\| \leq \|\underline{x}-\underline{x}_0\| \}$

$\leq \sup \{ .. \} \xrightarrow{\underline{x} \to \underline{x}_0} 0$ weil $\underline{f}$ st.

Also ist $F$ diffb. in $\underline{x}_0$ und $\nabla F(\underline{x}_0) = \underline{f}(\underline{x}_0)$. $\square$

1.24 Satz

a) $\underline{f}$ Gradient $\Rightarrow$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(*)$

b) Wenn $(*)$ und $G$ sternförmig, dann ist $\underline{f}$ Gradient.

Bew a) Ist $F : G \to \mathbb{R}$ Stammfkt, dann $C^2$ und (Satz von Clairaut - Schwarz) $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

b) Sei $\underline{p} \in G$ so dass $\forall \underline{x} \in G : \overline{\underline{p}\,\underline{x}} \subseteq G$, oBdA $\underline{p} = 0$.

$\overline{\underline{p}\,\underline{x}} : \gamma_{\underline{x}}(t) = t\underline{x}$. Setze $F : G \to \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto \int_{\gamma_{\underline{x}}} \underline{f} \cdot d\underline{x}$

$= \int_0^1 dt \; \underline{f}(t\underline{x}) \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 dt \; f_i(t\underline{x}) x_i$.

Bel. $F \in C^1$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 dt\, f_i(t\underline{x})x_i = ?$$

## 1.38 Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $[a,b]\times[c,d] \subseteq U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ st.

Beweis: s. Skript.

a) $h: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,dt$$

ist st.

b) Wenn zudem $\frac{\partial f}{\partial y}: U \to \mathbb{R}$ ex. und st. ist, dann ist

$$g: [c,d] \to \mathbb{R}$$

$$g(y) = \int_a^b f(t,y)\,dt$$

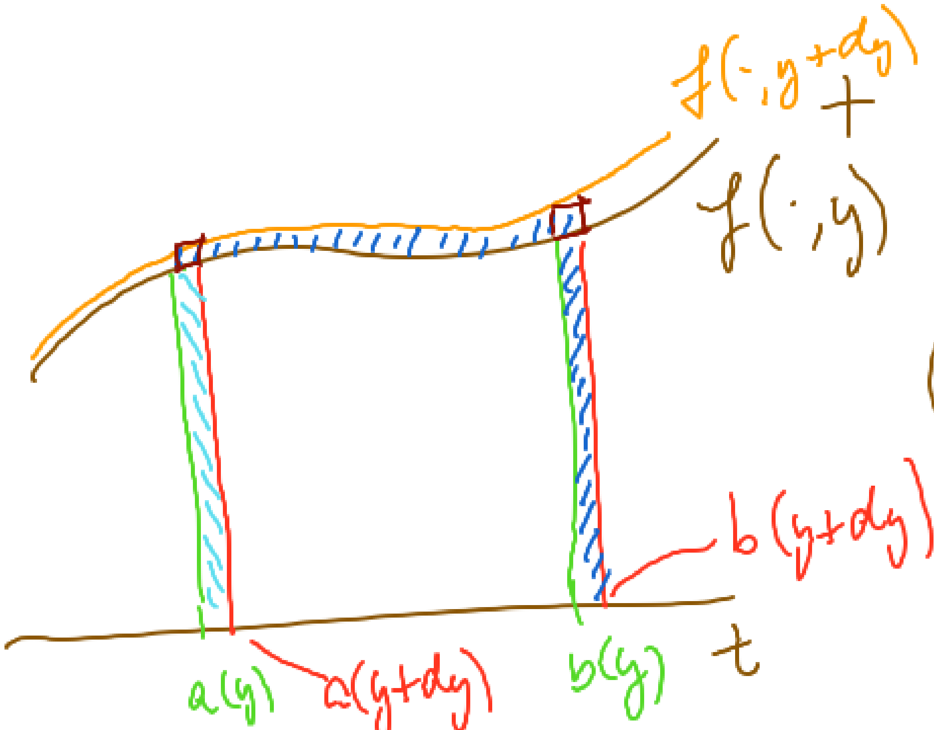
st. diffbar mit Abl.

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,dt.$$

Bew

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(t,y)\,dt = \frac{db}{dy} f(b(y),y) \;\cancel{+}\; - \frac{da}{dy} f(a(y),y)$$

$$+ \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,dt$$




$$\left(\text{vgl. } \frac{d}{dy} h\big(x_1(y), x_2(y), x_3(y)\big) = \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dy} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dy} + \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dy}\right)$$

Beweis der Beh

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \underline{f}_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 f_i(t\underline{x})x_i \, dt \overset{\text{Lemma}}{=} \int_0^1 dt \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left( f_i(t\underline{x})x_i \right)}$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t\underline{x})\, t x_i + f_i(t\underline{x})\,\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 dt \left( \overbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}^{(*):= \frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(t\underline{x})\, t x_i + f_i(t\underline{x})\, \delta_{ij} \right) = \int_0^1 dt \underbrace{\left( t \underbrace{\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t\underline{x})\, x_i}_{\partial f_j(t\underline{x})/\partial t} + f_j(t\underline{x}) \right)}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(t f_j(t\underline{x})\right)}$$

$$= \Big[ t f_j(t\underline{x}) \Big]_{t=0}^{t=1} = f_j(\underline{x}).$$

$\square$

__Bsp__ $\underline{A}$ aus ÜA2 erfüllt (*)
ist lokal Gradient von $\varphi$

__Bem__ Die Bed. "G sternförmig" lässt sich abschwächen zu "G ist einfach zusammenhängend."

**Def**

G einf. zushgd. $\Longleftrightarrow$ jeder geschl. Weg in G lässt sich in G zusammenziehen.

einf. zushgd. — nicht einf. zushgd.

## 1.28 Korollar

$n \in \{2,3\}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\underline{f}: G \to \mathbb{R}^n$ $C^1$

- $\underline{f}$ Gradient $\Rightarrow$ rot $\underline{f} = 0$
- $\cancel{\underline{f}}$ rot $\underline{f} = 0$, G sternf.

  $\Longrightarrow \underline{f}$ Gradient.

$$\text{rot}\,\underline{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$\nabla \times \underline{f}$ in $\mathbb{R}^3$.

Bsp. Ber. Stammfkt

$$\int f(x,y)\,dx = F(x,y) + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+2 \end{pmatrix} \text{ auf } \overset{G}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2}} \text{ ist } C^\infty$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial f_2}{\partial x} \text{ also } (*) \text{ erfüllt}$$

$$F(x,y) = \int^x f_1(x,y)\,dx = x^2 y + C(y)$$

$$F(x,y) = \int^y f_2(x,y)\,dy = x^2 y + 2y + D(x)$$

$$\Rightarrow x^2 y + C(y)$$

$$= x^2 y + 2y + D(x)$$

$$\Rightarrow C(y) - 2y = D(x)$$

$$= \text{const.} = c_0$$

also $C(y) = 2y + c_0$

$D(x) = c_0$

$$F(x,y) = x^2 y + 2y + c_0.$$

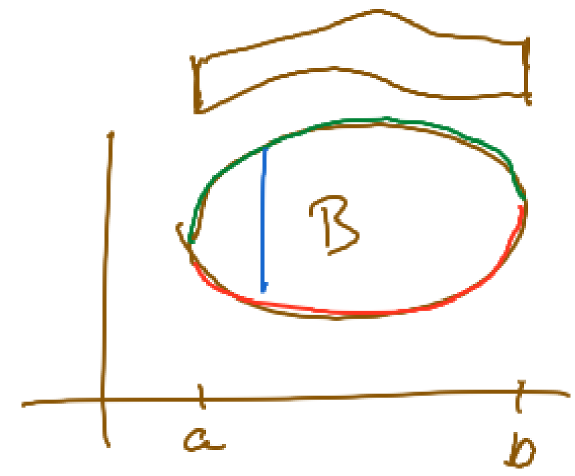
# Integralsatz von Green

**1.29 Def** $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt

**vertikal einfach** $:\Longleftrightarrow$

$\exists\, \varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

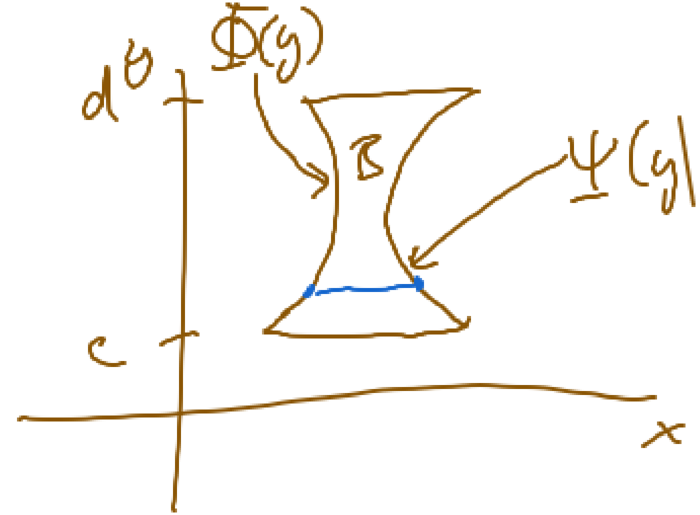
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\}$$




**horizontal einfach** $:\Longleftrightarrow$

$\exists\, \Phi, \Psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : c \le y \le d,\ \Phi(y) \le x \le \Psi(y) \right\}$$

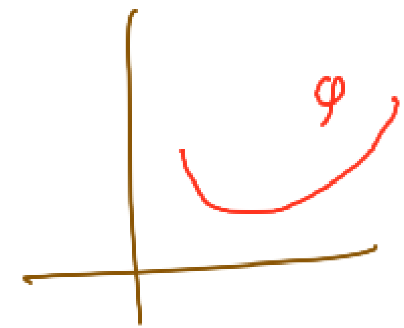


## Def

<u>Normalbereich</u> $:\Longleftrightarrow$ vertikal und horizontal einfach

<u>stückweise-$C^1$-Normalbereich</u> $:\Longleftrightarrow$

$\exists$ stückw. $C^1$-Kurven $\gamma_\varphi, \gamma_\psi, \gamma_\Phi, \gamma_\Psi$:




$$\text{Spur } \gamma_\varphi = \text{graph}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} : a \le x \le b \right\}$$
etc.

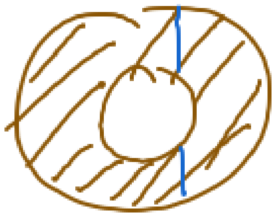
<u>Bspe</u>

$\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad [a,b] = [-1,1]$

$\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ $\quad \psi$ ist nicht $C^1$ bei $x = \pm 1$,

aber <u>graph($\psi$)</u> ist die Spur einer $C^1$-Kurve

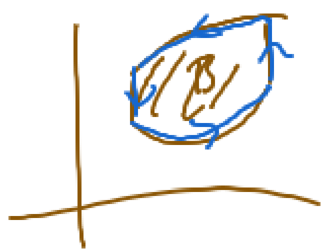
ist stw. $C^1$-Normalbereich.

Bsp 

ist nicht Normalbereich, aber Vereinigung von 4 stw. $C^1$-Normalbereichen

**Rand $\partial B$** ($B$ stw $C^1$-NB) ist Spur einer geschl. stw. $C^1$-Kurve

pos. or. (gg. UZS)



$$\gamma = \pm \gamma_\varphi + \begin{pmatrix} b \\ \varphi(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ \psi(b) \end{pmatrix} \pm \gamma_\psi + \begin{pmatrix} a \\ \psi(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \varphi(a) \end{pmatrix}$$