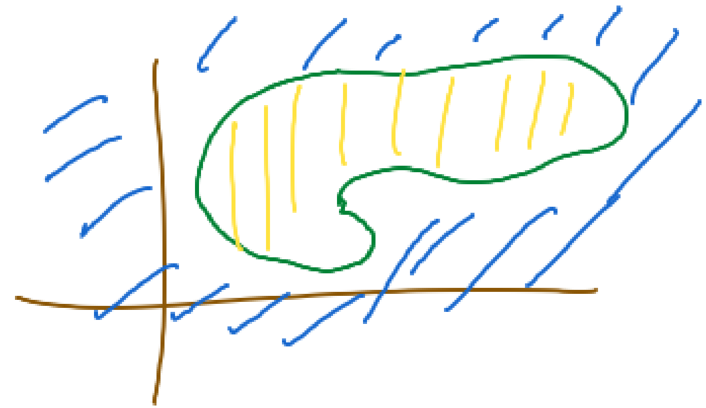


Normalbereich

Jordan-Kurvensatz

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stückw. C^1, geschl. $\gamma(b) = \gamma(a)$, inj. auf $[a,b)$, Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Spur}\,\gamma$ aus 2 Zshgskomp.en: dem Innern (umlaufene Region) und dem Äußeren von Spur γ. Beide haben als Rand Spur γ

1.31 Integralsatz von Green

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\underline{f} : U \to \mathbb{R}^2$ C^1

$\gamma : [a,b] \to U$ stückw. C^1, inj. auf $[a,b)$, $\gamma(b) = \gamma(a)$.

umlaufene Region $=: B \subset U$, $\partial B =$ Spur γ

γ pos. or. (d.h. der einhe Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix}$ zeigt ins Innere)

Dann $\displaystyle\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_B d^2\underline{x} \ \mathrm{rot}\, \underline{f} = \int_B d^2\underline{x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$.

Notation auch $\oint_{\partial B}$

für $\int_\gamma \leftarrow$ pos. or. ∂B

Beweis nur für den Fall, dass B ein stückw.-C^1-Normalbereich.

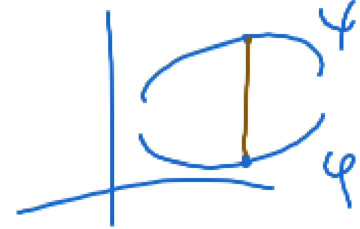
OBdA $\gamma_\varphi, \gamma_\psi$ C^1

$\gamma = \gamma_\varphi + \gamma_b - \gamma_\psi - \gamma_a$

$$\int_\gamma f \cdot dx = \int_\gamma \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx + \int_\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot dx$$

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \Big(\int_{\gamma_\varphi} + \underbrace{\int_{\gamma_b}}_{0} - \int_{\gamma_\psi} - \underbrace{\int_{\gamma_a}}_{0} \Big) \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \int_g^h dt\, f_1(\underbrace{\gamma_\varphi(t)}_{=(x_1(t),\varphi(x_1(t)))}) \underbrace{\frac{dx_1}{dt}}_{\geq 0} -$$

$$-\int_{r}^{s} dt\; f_1\Big(\underbrace{\gamma_\psi(t)}_{(\tilde{x}_1(t),\,\psi(\tilde{x}_1(t)))}\Big)\; \underbrace{\frac{d\tilde{x}_1}{dt}}_{\geq 0}$$



Substitutionsregel

$$= \int_{x_1(q)=a}^{x_1(l)=b} dx_1\; f_1(x_1, \varphi(x_1)) \;-\; \int_{\tilde{x}_1(r)=a}^{\tilde{x}_1(s)=b} dx_1\; f_1(x_1, \psi(x_1))$$

$$= \int_{a}^{b} dx_1 \Big(-f_1(x_1, \varphi(x_1)) + f_1(x_1, \psi(x_1)) \Big) \overset{HS}{=} \underbrace{-\int_{a}^{b} dx_1 \int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} dx_2\; \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)}_{-\int_B d^2\underline{x}\; \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x})} \qquad \square$$

Ebenso $\int_\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot d\underline{x} = \int_B d^2\underline{x}\; \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}) \Rightarrow$ Beh.

__Bem__ Noch wahr,

wenn ∂B mehrere Zshgs.komp.en hat, die alle stückw. C^1-Kurven sind.

$$\oint_{\partial B} = \sum_i \int_{\gamma_i}$$

Begründung/Bsp:

$$\int_B = \int_{B_1} + \int_{B_2} + \int_{B_3} + \int_{B_4}$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \oint_{\partial B_1} + \oint_{\partial B_2} + \oint_{\partial B_3} + \oint_{\partial B_4} =$$

$=$

$= \oint_{\partial B}$

1.34 Def Divergenz

$$\operatorname{div} \underline{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

$\underline{f}: U \to \mathbb{R}^n$ C^1

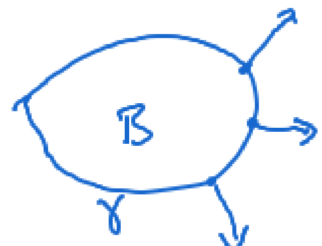
$U \subset \mathbb{R}^n$ offen

1.35 Korollar:

Integralsatz von Gauß in 2d

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\underline{f}: U \to \mathbb{R}^2$ C^1

$\gamma: [a,b] \to U$ stückw. C^1, inj. auf $[a,b)$, $\gamma(b) = \gamma(a)$, pos. or., B die umlaufene Region; sei $\underline{n}(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$



der äußere Normaleneinheitsvektor auf ∂B.

Dann

$$\oint_{\partial B} \underline{f} \cdot \underline{n}\, ds := \int_{\gamma} \underline{f} \cdot \underline{n}\, ds = \int_B \operatorname{div} \underline{f}\, d^2\underline{x}$$

Vgl.

$$\int_B \operatorname{rot} \underline{f}\, d^2\underline{x} = \oint_{\partial B} \underline{f} \cdot d\underline{x} \qquad (\text{"2d Stokes"})$$

"$ds = \|\gamma'(t)\|\, dt$"

$$\int_B \operatorname{div} \underline{f}\, d^2\underline{x} = \oint_{\partial B} \underline{f} \cdot \underline{n}\, ds \qquad (\text{"2d Gauß"})$$

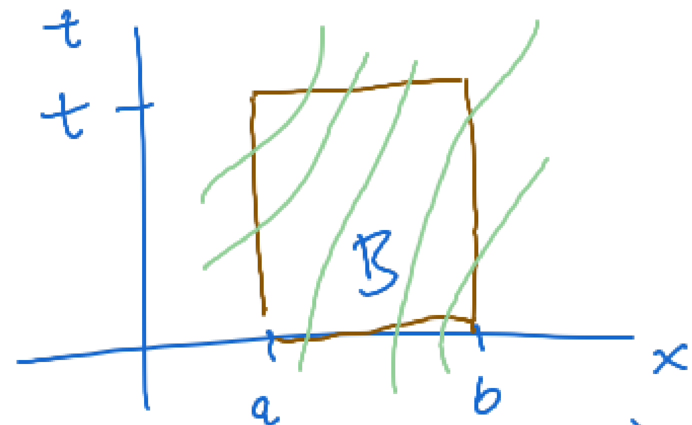
<u>Beweis</u> nur für den Fall $\gamma \in C^1$: $\int_\gamma \underline{f} \cdot \underline{n}\, ds = \int_a^b dt\, \underline{f}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \cancel{\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \cancel{\|\gamma'(t)\| dt} = \int_a^b dt \left(f_1(\gamma(t))\, \gamma_2'(t) - f_2(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) \right)$

$$= \int_\gamma \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \cdot d\underline{x} \overset{\text{Green}}{=} \int_B d^2\underline{x}\, \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\partial(-f_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = +\operatorname{div} \underline{f}. \qquad \square$$

Anwendung

Kontinuitätsgl. in 1d



$\rho(t,x)$, $j(t,x) \in C^1$, $x \in \mathbb{R}^1$

Dichte Strom $(j = \rho v)$

Kont.gl. $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$ $\left(\text{"} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x j = 0 \text{"} \right)$

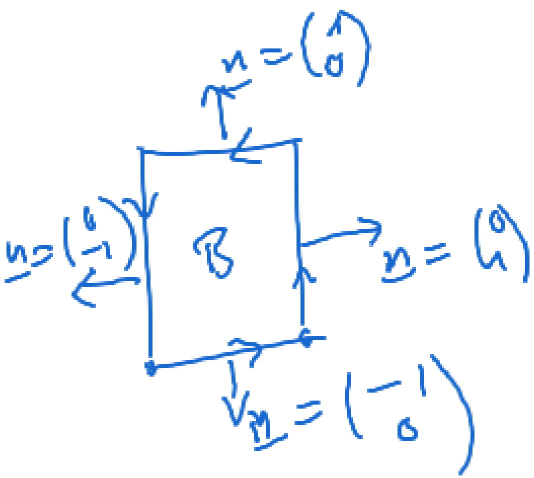
also $\operatorname{div}_{t,x} \begin{pmatrix} \rho \\ j \end{pmatrix} = 0$

$$\int_a^b \rho(t,x)\,dx = \int_a^b \rho(0,x)\,dx + \int_0^t dt'\, j(t',a) - \int_0^t dt'\, j(t',b)$$

Beh Kont.gl. $\Rightarrow$ lokaler Erhaltungssatz:

Beweis

$$0 = \int_{[0,t]\times[a,b]} d^2\underline{x}\ \operatorname{div}\underbrace{\begin{pmatrix}\rho\\ j\end{pmatrix}}_{\underline{f}} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_\gamma \begin{pmatrix}\rho\\ j\end{pmatrix}\cdot \underline{n}\, ds$$



$$= -\int_a^b dx\, \rho(0,x) + \int_t^0 dt'\, (-j(t',a))$$

$$+ \int_b^a dx\, \rho(t,x) - \int_0^t dt'\, j(t',b)$$

$$= -\int_a^b \rho(0,x)\,dx - \int_a^b \rho(t,x)\,dx + \int_0^t dt'\, j(t',a)$$

$$- \int_0^t dt'\, j(t',b). \qquad \square$$

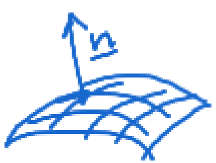
Kapitel 2:

Gauß und Stokes

Jetzt $\int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot \underline{n} \, dS$ "Fluss von $\underline{f}$ durch $\mathcal{F}$"

in $\mathbb{R}^3$

$\dim \mathcal{F} = 2$



$\mathcal{F}$

Parametrisierte Flächen

2.1 Def Sei γ stw. C^1 geschl. Kurve in $\mathbb{R}^2$, inj. auf $[a,b)$

D die von γ umlaufene Region. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen

$D \subset U$, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, C^1

$\mathring{D}$ = Inneres von $D = D \setminus \partial D$

$\phi|_{\mathring{D}}$ inj.

$D\phi$ = Abl. von ϕ, $D\phi(\underline{\alpha}) = 3\times 2$-Matrix, $\underline{\alpha} \in U \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{\alpha} = (u,v)$

$\mathrm{Rg}(D\phi(\underline{\alpha})) = 2$ für fast alle $\underline{\alpha} \in D$

Dann heißt ϕ Parametrisierung der C^1-Fläche

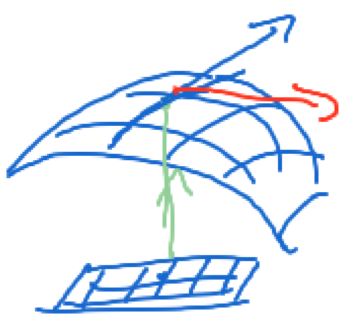
$\mathcal{F} = \phi(D)$ mit Parameterbereich D.

stückw. C^1, wenn $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_i$ C^1, die sich nur in ihrem Rand schneiden.

Koordinatenlinien $\quad \gamma(t) = \phi(u+t, v)$

$\gamma'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial u}$ tangential an $\mathcal{F}$ in $\phi(u,v)$

ebenso für v



$Rg(D\phi) = 2 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$ sind lin. unabh.

Notation $\phi_u = \partial_u \phi = \frac{\partial \phi}{\partial u}$

Tangentialebene $T_{\underline{\alpha}} = \phi(\underline{\alpha}) + \mathrm{Span}\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}(\underline{\alpha}), \frac{\partial \phi}{\partial v}(\underline{\alpha}) \right\}$

$\underline{\alpha} = (u, v)$

und $0 \neq \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \perp T_{\underline{\alpha}}$, ein Normalenvektor.