Wdh. Def. 2.1

parametrisierte Fläche

$\mathcal{F} = \phi(D)$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, ϕ C^1, $\phi|_{\mathring{D}}$ inj.,

$Rg\,(\underbrace{D\phi(\underline{\alpha})}_{[\partial_u\phi,\,\partial_v\phi]}) = 2$ für fast alle $(u,v) = \underline{\alpha} \in D$

$\iff \partial_u\phi \times \partial_v\phi \neq 0$

2.3 Bspe

a) sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1

Der Graph von φ

$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u,v) \end{pmatrix} : (u,v) \in D \right\}$

kann über D durch

$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u,v) \end{pmatrix}$ param.

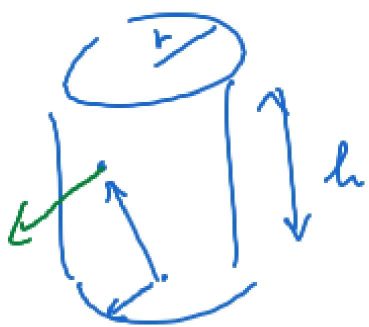
werden. ϕ ist inj., und

$\partial_u\phi \times \partial_v\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v\varphi \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\partial_u\varphi \\ -\partial_v\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg = 2$

b) Zylinder mit Radius r und Höhe h ist glatt (C^1) param. Fläche mit

$$\phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$



Parameterbereich

$$D = [0, 2\pi] \times [0, h]$$

Normalenvektor

$$\partial_\theta \phi \times \partial_z \phi = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

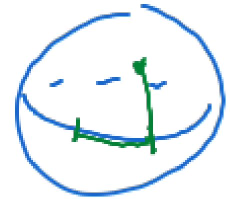
c) Sphäre mit Radius r ist C^1-param. Fläche mit

$$\phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

φ = Azimutal-Winkel (Längengr.)

θ = Ko-Polwinkel (Breitengr.)

(Polwinkel $\frac{\pi}{2} - \theta$)



Normalenvektor

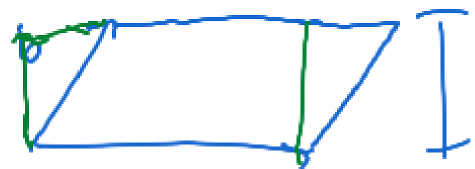
$$\partial_\varphi \phi \times \partial_\theta \phi =$$

$$= r^2 \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cos\varphi \\ -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta \cos\varphi \\ \cos^2\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \sin\vartheta \sin^2\varphi + \cos\vartheta \sin\vartheta \cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= r\cos\vartheta \qquad \phi(\varphi, \vartheta) \neq 0 \quad \text{in } \mathring{D}, \quad D = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Flächenintegrale

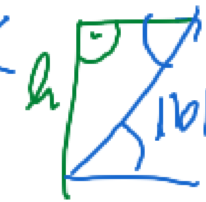
Vorb $\quad a, b \in \mathbb{R}^3$



a

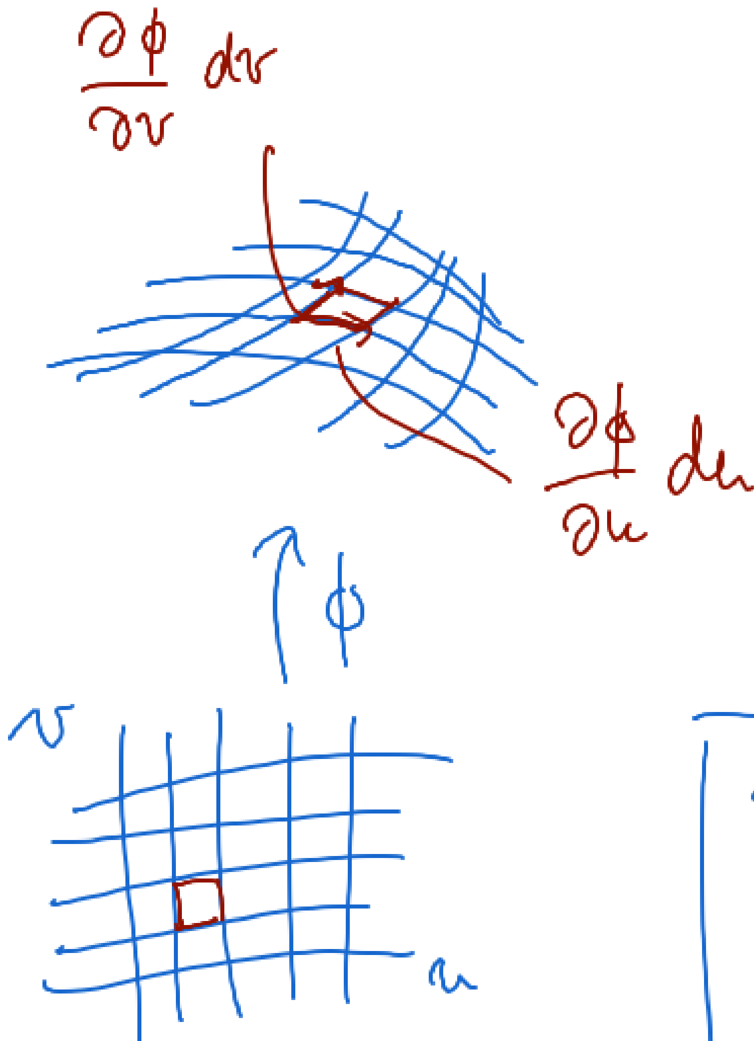
$\|a\|$

$h = \|b\| \sin\sphericalangle$



Flächeninhalt =

$$\|a\| \, \|b\| \sin\sphericalangle(a, b) = \|a \times b\|$$



Flächeninhalt des Flächenel.s

$$\|\partial_u\phi\, du \times \partial_v\phi\, dv\|$$

$$= \|\partial_u\phi \times \partial_v \phi\|\, du\, dv$$

2.4 Def a) skalares Flächenint.

Sei $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ st. Skalarfeld

$$\int_{\mathcal{F}} f\, dS := \int_{\phi} f\, dS := \int_D d^2(u,v)\, f(\phi(u,v))\, \|\partial_u\phi \times \partial_v\phi\|$$

Flächeninhalt:

$$J(\mathcal{F}) := \int_\phi \underline{1}\, dS$$

(= Flussint.)

b) vektorielles Flächenint.

$\underline{f} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ st. Vektorfeld

$$\int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_\phi \underline{f} \cdot d\underline{S} :=$$

$$:= \int_\phi \underline{f} \cdot \underline{n}\, dS$$

$$= \int_D d^2(u,v)\, \underline{f}\,(\phi(u,v)) \cdot (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)$$

denn $\underline{n} = \dfrac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{\| \partial_u \phi \times \partial_v \phi \|}$

c) $\mathcal{F}$ stw. C^1; $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$

dann $\displaystyle\int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S} =$

$$\sum_i \int_{\mathcal{F}_i} \underline{f} \cdot d\underline{S}$$

entspr. für skalares Int.

2.6 Bsp

Flächeninhalt der 2-Sphäre

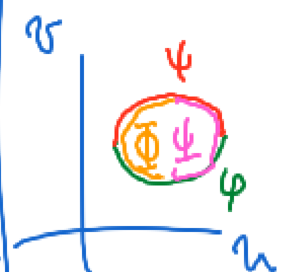
Bsp. 2.3 c) $\Longrightarrow$ $\mathcal{J}(f) =$

$$= \int_D \underbrace{\|\partial_\varphi \phi \times \partial_\theta \phi\|}_{r^2 \cos \theta} \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \; r^2 \cos \theta$$

$$= 2\pi r^2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \; \cos \theta}_{\left[+\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2}$$

$$= \underline{\underline{4\pi r^2}}$$



Satz von Fubini

B Normalbereich in $\mathbb{R}^2$

$f : B \to \mathbb{R}$ st.

Dann ist $\int_B d^2(u,v) \, f(u,v)$

$$= \int_a^b du \int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} dv \;\; f(u,v)$$

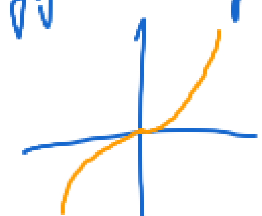
$$= \int_c^d dv \int_{\Phi(v)}^{\Psi(v)} du \;\; f(u,v)$$

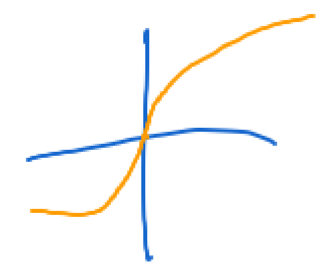
Parameterwechsel

Essenz: Wenn ϕ, ψ dieselbe Fläche $\mathcal{F}$ (mit ders. Or.) parametrisieren, dann $\int_\phi f\, dS = \int_\psi f\, dS$. Beruht auf dem

Transformationssatz für Integrale (d-dim Substitutionsregel)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi : V \to U$ Diffeomorphismus (d.h. φ bij. und φ, φ^{-1} beide C^1)





Dann
$$\int_U f(\underline{y})\, d^d\underline{y} = \int_V f(\varphi(\underline{x}))\, \Big|\underbrace{\det(\underbrace{D\varphi(\underline{x})}_{\text{Jacobi-Matrix}})}_{\text{Jacobi-Det.} = \text{Funktionaldet.}}\Big|\, d^d\underline{x}$$

$\underline{y} = \varphi(\underline{x})$ $\quad$ $\boxed{\text{"}\, d^d\underline{y} = |\det D\varphi|\, d^d\underline{x} \,\text{"}}$

Hier $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$

<u>2.7 Prop</u> $\phi : U \to \mathbb{R}^3$, $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ 2 Param. von $\mathcal{F}$

$\psi = \phi \circ \varphi$, $\varphi : V \to U$ Umpara. Diffeo.

- f st. Skalarfeld $\Longrightarrow$ $\int_\phi f \, dS = \int_\psi f \, dS$
- $\underline{f}$ st. Vektorfeld $\Longrightarrow$ $\int_\phi \underline{f} \cdot d\underline{S} = \pm \int_\psi \underline{f} \cdot d\underline{S}$

$+$ falls φ Or. erhält
$-$ falls φ Or. ändert

Dann

- $(\partial_s \psi \times \partial_t \psi)(s,t) = (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(\varphi(s,t)) \cdot \det D\varphi(s,t)$
- entweder überall $\det D\varphi > 0$ (φ erhält Or.)
  oder überall $\det D\varphi < 0$ (φ ändert Or.)

<u>Bem Or:</u>

eine Seite von F ist lackiert
die andere ist klebrig
$\underline{n}$ ~~...~~ kommt aus der lackierten

Vertauschen $u \leftrightarrow v$
ändert Or.

$$\Rightarrow \partial_s \psi \times \partial_t \psi =$$

$$\left(\partial_u \phi \times \partial_v \phi\right)\left(\partial_s \varphi_1 \partial_t \varphi_2 - \partial_s \varphi_2 \partial_t \varphi_1\right)$$

$$= \left(\partial_u \phi \times \partial_v \phi\right) \det D\varphi$$

<u>Bew</u> (Prop. 2.7)

- $D\psi = D\phi\big|_{\varphi(s,t)} \circ D\varphi$

d.h. $\partial_s \psi = D\phi \circ \partial_s \varphi$, $\partial_t \psi = D\phi \circ \partial_t \varphi$

$= \partial_u \phi \, \partial_s \varphi_1 + \partial_v \phi \, \partial_s \varphi_2$

$= \partial_u \phi \, \partial_t \varphi_1 + \partial_v \phi \, \partial_t \varphi_2$

- $$\int_\phi f\, dS = \int_U d^2(u,v)\, f(\phi(u,v))\, \|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\|$$

$$\overset{TS}{=} \int_V d^2(s,t)\, f(\phi(\varphi(s,t)))\, \|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\|_{(u,v)=\varphi(s,t)}\, |\det D\varphi|$$

$$= \int_V d^2(s,t)\, f(\psi(s,t))\, \|\partial_s \psi \times \partial_t \psi\| = \int_\psi f\, dS$$

- vektoriell ebenso

$\square$

2.9 Def

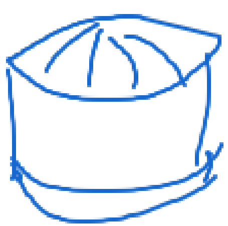
$B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt <u>z-einfach</u> $\Longleftrightarrow$

$\exists$ Normalbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$, Fktnen $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ mit

$\varphi(x,y) \leq \psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$ und

$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ und } \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \}$$

B Normalbereich $\Longleftrightarrow$ x-einfach und y-einfach und z-einfach



$$\partial B = F^+ \cup F^- \cup F^Z$$

$$\phi = \phi^+ - \phi^- + \phi^Z$$

2.11

Integralsatz von Gauß

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit stw. C^1-Rand $\partial B = F$ (nach außen or.), $B \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\underline{f}: U \to \mathbb{R}^3$ C^1.

Dann
$$\int_B \operatorname{div} \underline{f} \, d^3\underline{x} = \int_{\overline{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S}$$