Satz von Gauß

$B \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit stw. C^1-Rand $\mathcal{F} = \partial B$ nach außen or.

$\underline{f} : U \to \mathbb{R}^3$ C^1, $B \subset U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen

$$\int_B \operatorname{div} \underline{f} \, d^3\underline{x} = \int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S}$$

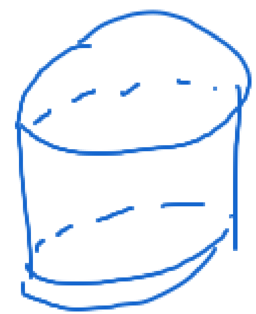
Beweis für C^1-Normalbereiche

B.

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot d\underline{S} = -\int_{\phi^-} + \int_{\phi^+} + \int_{\phi^Z}$$

$\underline{\Phi}$

$B =$ 

$\underline{\Psi}$

ϕ^+: $\underline{n}(u,v) = \dfrac{\partial_u \phi^+ \times \partial_v \phi^+}{\|\quad\|} = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\\partial_u\Phi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\\partial_v\Phi\end{pmatrix}}{\|\quad\|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-\partial_u\Phi\\-\partial_v\Phi\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+(\partial_u\Phi)^2+(\partial_v\Phi)^2}}$

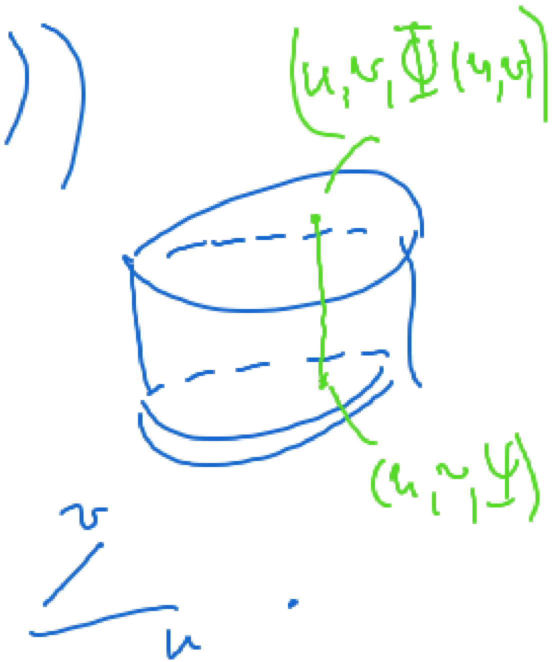
$\phi^+(u,v) = (u,v,\Phi(u,v))$

$$\int_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix}0\\0\\f_3\end{pmatrix}\cdot d\underline{S} = \int_D f_3(u,v,\Phi(u,v)) \frac{1}{\cancel{\sqrt{\dots}}} \cancel{\sqrt{\dots}}\, du\, dv \qquad \phi^+$$

$$- \int_D f_3(u,v,\Psi(u,v))\, du\, dv \qquad \phi^-$$

$$+\ 0 \qquad \phi^2$$

$$= \int_D du\,dv \left(f_3(u,v,\Phi(u,v)) - f_3(u,v,\Psi(u,v)) \right)$$



$$\overset{HS}{=} \int_D du\,dv \int_{\Psi(u,v)}^{\Phi(u,v)} dz\, \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(u,v,z)$$

$$= \int_B d^3\underline{x}\, \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$ addiere 3 Beiträge $\Rightarrow$ Gauß. $\square$

Hyperflächenintegrale in n Dim

Def glatte Hyperfläche $(n-1)$-dim in $\mathbb{R}^n$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt mit glattem Rand,

$\phi : U \to \mathbb{R}^n$ C^1, $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $D \subseteq U$

$\phi|_{\mathring{D}}$ inj., $\operatorname{Rg} D\phi = n-1$ fast überall

Bem $\mathrm{Vol}_{n-1}(P_{n-1}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1})) = \| \underline{K}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}) \|$

$P_{n-1} = (n-1)$-dim $\overset{\text{in}}{\mathbb{R}^n}$ Parallelotop in $\mathbb{R}^n$ verallg. Kreuzprodukt

$$\underline{K}(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n-1,1} & \underline{e}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{n-1,n} & \underline{e}_n \end{vmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$\underline{K} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{e}_k \quad \text{mit} \quad \det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{n-1},\underline{b}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k .$$

$$\left(\text{Dann } \underline{K}\cdot\underline{b} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = \det(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{n-1},\underline{b}) \quad \forall \underline{b}\in\mathbb{R}^n .\right) \quad \forall \underline{b}\in\mathbb{R}^n$$

Def Sei $\mathcal{F} = \phi(D)$ $n-1$-Fläche in $\mathbb{R}^n$.

a) skalares Integral: $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ st. Skalarfeld

$$\int_{\mathcal{F}} f \, dS := \int_D d^{n-1}u \; f(\phi(u)) \, \| \underline{K}(D\phi) \| .$$

$$\int_{\mathcal{F}} 1 \, dS = \text{Hyperflächeninhalt von } \mathcal{F} = \operatorname{Vol}_{n-1}(\mathcal{F}) .$$

b) vektorielles Integral: $\underline{f} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ st. Vektorfeld, $\underline{n} = \dfrac{\underline{K}(D\phi)}{\| \underline{K}(D\phi) \|}$

$$\int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S} := \int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot \underline{n} \, dS = \int_D d^{n-1}u \; \underline{f}(\phi(u)) \cdot \underline{K}(D\phi(u)) .$$

Integralsatz von Gauß in n Dim

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit stw. C^1-Rand $\mathcal{F} = \partial B$ nach außen or.,
$B \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\underline{f} : U \to \mathbb{R}^n$ C^1. Dann

$$\int_B d^n\underline{x} \, \operatorname{div} \underline{f} = \int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S}$$

Anwendung Kontinuitätsgl. $\frac{\partial \rho(t,\underline{x})}{\partial t} = - \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{j}(t,\underline{x})$

$\rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ Dichte

$\Downarrow$ Gauß in 4d

$\underline{j} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ Stromdichte

$B = [0,t] \times A$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$

Ldg.-Erhaltungssatz

$$\int_A d^3\underline{x} \, \rho(t,\underline{x}) = \int_A d^3\underline{x} \, \rho(0,\underline{x}) - \int_0^t dt' \int_{\partial A} d\underline{S} \cdot \underline{j}(t,\underline{x})$$

Der Integralsatz von Stokes

in 3d $\int_F \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\partial F} \underline{f} \cdot d\underline{x}$

2.14 Def Die gl. Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt orientierbar, wenn $\exists$ st. Einheitsnormalenvektorfeld $\underline{n} : F \to \mathbb{R}^3$, $\underline{n}$ heißt Orientierung von F.

Bem Eine Fläche F mit k Zshgskomp.en hat 2^k Orientierungen oder 0.

2.16 Bsp Das Möbiusband ist nicht or.bar.

Bsp B komp., stw C^1- mit Rand ∂B

$\Rightarrow \partial B$ or.bar

(äußere Or.)

2.15 Bem

geg. Parameterdarst. $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ von $\mathcal{F}$ auf Param.bereich $D \subseteq U$ so dass, $D\phi$ <u>überall</u> vollen Rang hat. Dann

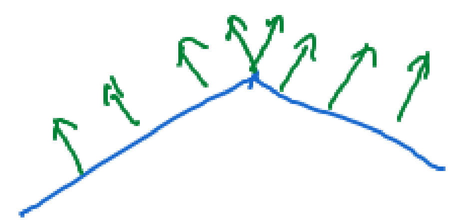
$\mathcal{F}$ orientierbar $\iff$

$\forall\, p,q \in D$ mit $\phi(p) = \phi(q)$:

$$\frac{\partial_u \phi(p) \times \partial_v \phi(p)}{\| \quad \|} = \frac{\partial_u \phi(q) \times \partial_v \phi(q)}{\| \quad \|}$$

Für stw. C^1-Fläche: Orientierung $\underline{n}$ so, dass ~~st.,~~ ~~also~~

$\left\{ \begin{array}{l} \text{st. auf jedem Stück} \\ \text{konsistent an jeder Kante:} \end{array} \right.$



2.17 Integralsatz von Stokes

(1850 Lord Kelvin, 1861 von H. Hankel)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stw. C^1-Rand $\gamma : [a,b] \to D$, pos. or.,

$\phi(D) = \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^3$ orientierte stw. C^1-Fläche

$\underline{f}$ C^1-VF auf Umg. von $\mathcal{F}$. Dann

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\phi \circ \gamma} \underline{f} \cdot d\underline{x}$$

Bew für $\phi \in C^2$:

$$\int_{\phi\circ\gamma} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_a^b dt \; \underline{f}(\phi(\gamma(t))) \cdot (\phi\circ\gamma)'$$

$$= \int_a^b dt \; \underbrace{\underline{f}(\phi\circ\gamma)^t}_{1\times 3} \; \underbrace{D\phi(\gamma)}_{3\times 2} \; \underbrace{\gamma'(t)}_{2\times 1}$$

Setze $\underline{g}(u,v) = \underbrace{D\phi^t}_{2\times 3} \; \underbrace{\underline{f}(\phi(u,v))}_{3\times 1}$

$\underline{g} : U \to \mathbb{R}^2$

$$= \int_c^b dt \; \underline{g}^t(\gamma(t)) \, \gamma'(t) = \int_\gamma \underline{g} \cdot d\overset{2d}{\underline{x}}$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \int_D \cancel{d^2x} \, du \, dv \left(\frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{\partial g_1}{\partial v} \right)$$

Zu zeigen: $\frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{\partial g_1}{\partial v} = (\mathrm{rot}\, \underline{f})(\phi) \underset{\uparrow \text{ in } \mathbb{R}^3}{\cdot} (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)$ (*)

(denn dann $\int_{\phi\circ\gamma} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_D du\,dv\,(\mathrm{rot}\,\underline{f})(\phi) \cdot (\partial_u \phi \times \partial_v \phi) = \int_\phi (\mathrm{rot}\,\underline{f}) \cdot d\underline{S}$)

Prüfe (*):

$$\frac{\partial g_2}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\partial_v \phi \cdot \underline{f}) = \partial_u \partial_v \phi \cdot \underline{f} + \sum_{j=1}^{3} \partial_v \phi \cdot \partial_{x_j} \underline{f}\, \partial_u \phi_j$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v} = \partial_v \partial_u \phi \cdot \underline{f} + \sum_{j=1}^{3} \partial_u \phi \cdot \partial_{x_j} \underline{f}\, \partial_v \phi_j \qquad \square$$