Erläuterungen zum Aharonov-Bohm-Effekt

Roderich Tumulka

Sommersemester 2021

Der Aharonov-Bohm-Effekt ist ein Phänomen der Quantenphysik, das erstmals von Aharonov und Bohm [1] als Beispiel dafür beschrieben wurde, dass es in der Natur elektromagnetische Vektorpotentiale gibt und nicht nur Feldstärken. Dabei ist das Vektorpotential $\underline{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass seine Rotation mit dem Magnetfeld $\underline{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ übereinstimmt,

$$\nabla \times \underline{A} = \underline{B}\,. \tag{1}$$

Solche Vektorpotentiale wurden schon im 19. Jhd. in der klassischen (d.h. Vor-Quanten) Physik betrachtet, aber für eine mathematische Fiktion gehalten, während man die Feldstärke $\underline{B}$ für real existent hielt. In der Quantenphysik tritt $\underline{A}$ in der Schrödinger-Gleichung (der Zeitentwicklungsgleichung für die Wellenfunktion ψ) auf,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\underline{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar\nabla - e\underline{A}(\underline{x})\Big)^2 \psi(\underline{x},t)\,, \tag{2}$$

wobei m die Masse und e die Ladung des Elektrons ist. Da die Wellenfunktion ψ nicht direkt messbar ist, ist nicht offensichtlich, dass die Natur $\underline{A}$ kennen muss und nicht nur $\underline{B}$. Andererseits gibt (nach der Bornschen Regel) $|\psi(\underline{x},t)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektronenortes zur Zeit t an, die durch wiederholte Experimente mit Messung des Orts anhand der Statistik der Messergebnisse feststellbar ist. Aharonov und Bohm schlugen ein Interferenz-Experiment im Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus C$ vor, wobei C ein Zylinder um die z-Achse ist (sagen wir, vom Radius 1). Dabei werden Wellen beim Auftreffen auf C reflektiert, so dass sie nicht in C eindringen können. Wellen, die links um C propagiert sind, treffen dahinter auf Wellen, die rechts um C propagiert sind, und das Interferenzmuster, das in $|\psi|^2$ sichtbar wird, hängt vom Gangunterschied (der Phasendifferenz) der beiden Wellen ab. Nähere Betrachungen zeigen, dass dieser Gangunterschied durch das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \underline{A} \cdot d\underline{x} \tag{3}$$

gegeben ist, wobei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{R}^3 \setminus C$ ist, der C einmal umläuft. Aharonov und Bohm schlugen vor, im Innern von C eine stromdurchflossene Spule in z-Richtung aufzubauen. Eine ideale Spule erzeugt ein homogenes Magnetfeld im Innern der Spule, während das Magnetfeld außerhalb der Spule Null ist. Die Wellenfunktion propagiert also nur in einem Gebiet (nämlich $\mathbb{R}^3 \setminus C$), in dem $\underline{B} = 0$ gilt. Allerdings zeigen weitere Betrachtungen, dass $\underline{A}$ außerhalb von C nicht Null sein kann, wenn $\nabla \times \underline{A}$ im Innern von C nicht Null sein darf. Vielmehr muss $\underline{A}$ außerhalb von C von der Form

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{b}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla F \tag{4}$$

mit irgendeinem Skalarfeld F sein. Hierbei ist b die Stärke des Magnetfeldes im Innern von C und damit proportional zum elektrischen Strom, der durch die Spule fließt. Wie wir wissen, ist (3) von der Wahl von F unabhängig, weil γ geschlossen ist. Wie in Aufgabe 2 gezeigt, hat (3) den Wert $2\pi b$. Das bedeutet, dass das Interferenzmuster geändert werden kann (die Interferenz-Streifen verschieben sich), indem man den Strom durch die Spule ändert; insbesondere hängt das beobachtbare Verhalten der Elektronen von b ab. Diese theoretische Vorhersage der Quantenmechanik wurde experimentell bestätigt. Da die Elektronen nie das Gebiet mit $\underline{B} = 0$ verlassen, schlossen Aharonov und Bohm, dass das Vektorpotential $\underline{A}$ einen Einfluss auf ihr Verhalten haben und daher real existieren muss.

Literatur

[1] Y. Aharonov und D. Bohm: Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review* **115**: 485–491 (1959)