

INTEGRALSÄTZE: ÜBUNGSBLATT 1

Aufgabe 1: Bogenlänge in Polarkoordinaten (40 Punkte)

Eine Kurve γ in \mathbb{R}^2 sei in Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben durch die Gleichung $r = f(\varphi)$ mit $a \leq \varphi \leq b$, wobei $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine gegebene C^1 -Funktion ist und $a, b \in [0, 2\pi]$ gegebene Konstanten sind.

- Geben Sie einen Ausdruck für $\gamma(\varphi)$ (in Cartesischen Koordinaten!) an. (Darin sollte f vorkommen.) (10 Punkte)
- Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für die Länge der Kurve γ an. (Das sollte ein Integral sein, in dem f und f' vorkommen.) Geben Sie auch hier den vollständigen Rechenweg an. (30 Punkte)

Aufgabe 2: Ein Wegintegral zum Aharonov-Bohm-Effekt (60 Punkte)

Sei das Vektorfeld \underline{A} in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$\underline{A}(x, y) = \frac{b}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

mit einer beliebigen Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Der geschlossene Weg γ umlaufe den Ursprung entgegen dem Uhrzeigersinn, gegeben in Polarkoordinaten (r, φ) durch die Gleichung $r = f(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, mit einer C^1 -Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$, die $f(2\pi) = f(0)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} \underline{A} \cdot d\underline{x} = 2\pi b,$$

unabhängig von der Wahl von f .

Abgabe: Bis Samstag, 26.6.2021, um 12:00 Uhr auf URM als "Blatt 31".