Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
25. Juni 2021

Integralsätze: Übungsblatt 2

Aufgabe 3: Verschwindender Gradient (20 Punkte)
In Analysis 1 wurde gezeigt, dass eine C^1-Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung überall verschwindet, konstant sein muss. Zeigen Sie daraus: Wenn $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist und $F : G \to \mathbb{R}$ ein C^1-Skalarfeld mit $\nabla F = 0$, dann ist F konstant.

Aufgabe 4: Stammfunktionen bestimmen (50 Punkte)
Man bestimme (mit Beweis) alle C^1-Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren Gradient von der Form

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x}y + xy^2 + g(y) \\ x^2y + 4y^3x + h(x) \end{pmatrix}$$

mit irgendwelchen (nicht vorgegebenen) C^1-Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. (*Tipp*: Die Lösung enthält vier beliebige Konstanten.)

Aufgabe 5: Konservative Vektorfelder (30 Punkte)
Sei $\underline{A}$ wie in Aufgabe 2 auf Blatt 1 das Vektorfeld

$$\underline{A}(x_1, x_2) = \frac{b}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ mit $b \neq 0$. Aus Aufgabe 2 folgt, dass $\underline{A}$ nicht konservativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial A_1/\partial x_2 = \partial A_2/\partial x_1$.

(b) Wie kann das sein? Wieso folgt aus (a) nicht mit dem Integrabilitätskriterium, dass $\underline{A}$ konservativ ist?

(c) Seien (r, φ) Polarkoordinaten, $(x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Hierbei hat man die Freiheit, für φ irgendein Intervall $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ der Länge 2π wählen; dann ist φ als Funktion von (x_1, x_2) auf der geschlitzten Ebene $E_\alpha := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) : r \geq 0\}$ stetig differenzierbar. Erklären Sie geometrisch, warum auf E_α gilt $\underline{A} = b\nabla\varphi$. Also ist $\underline{A}$ lokal ein Gradient.

Abgabe: Bis Samstag, 3.7.2021, um 12:00 Uhr auf URM als "Blatt 32".