Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
16. Juli 2021

Integralsätze Übungsblatt 5

Aufgabe 11: Satz von Stokes (70 Punkte)
Der Satz von Stokes besagt: Für eine orientierte stückweise-C^1-Fläche $\mathcal{F}$ mit positiv orientierter Randkurve $\partial\mathcal{F}$ und ein C^1-Vektorfeld $\underline{f}$, das auf einer offenen Umgebung von $\mathcal{F}$ definiert ist, gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\partial\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{x}. \tag{1}$$

Wir wollen diese Beziehung in einem konkreten Fall verifizieren. Dazu sei $\mathcal{F}$ die nördliche Hemisphäre vom Radius 1 um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit der Orientierung, in der $\underline{n}$ nach außen zeigt. Das C^1-Vektorfeld $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Man berechne beide Seiten von Gl. (1). Benutzen Sie dabei ohne Beweis, dass

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin^2\varphi = \pi, \qquad \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin^3\theta = \frac{2}{3}, \qquad \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta\cos^2\theta = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

(Nebenbei bemerkt lassen sich solche Integrale oft auswerten, indem man die Winkelfunktion durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrückt.)

Aufgabe 12: Flächen-unabhängige Integrale (30 Punkte)
So wie das Wegintegral eines Gradientenfeldes von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$ unabhängig von der Wahl des Weges von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$ ist, so ist das Flächenintegral eines Rotationsfeldes unabhängig von der Wahl der Fläche, die in eine gegebene Randkurve eingespannt wird. Das heißt: Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ orientierte stückweise-C^1-Flächen in $\mathbb{R}^3$ mit $\partial\mathcal{F}_1 = \partial\mathcal{F}_2$ inklusive Orientierung, und ist $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1, dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}_1} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\mathcal{F}_2} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S}\,. \tag{3}$$

a) Begründen Sie dies aus dem Integralsatz von Stokes.

b) Begründen Sie dies aus dem Integralsatz von Gauß.

Abgabe: Bis Samstag, 24.7.2021, um 12:00 Uhr per URM