Prof. Dr. Frank Loose
Prof. Dr. Roderich Tumulka

Sommersemester 2021
Universität Tübingen, 31.7.2021

Klausur Mathematik für Physiker 4

Name:

Matrikelnummer:	Geburtsdatum:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ
Punkte:						

Hinweise:

- Bearbeiten Sie alle Aufgaben 1–5. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 36. Sie haben 90 Minuten Zeit.
- Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei dieser Klausur nicht erlaubt.

Viel Erfolg!

Klausurteil Funktionentheorie

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}\right).$$

(a) Begründen Sie, warum f holomorph ist, aber keine Stammfunktion hat.
(b) Geben Sie ein (möglichst großes) Gebiet $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0,2\}$ an, wo $f|G$ eine Stammfunktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ hat und geben Sie eine Abbildungsvorschrift für F an. Begründen Sie.

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Wir defnieren den *komplexen Cosinus hyperbolicus* $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den *komplexen Sinus hyperbolicus* $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

(a) Begründen Sie, warum das wohldefiniert ist, d.h., warum die Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren, und warum cosh und sinh holomorph sind.
(b) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh'(z) = \sinh(z), \quad \sinh'(z) = \cosh(z).$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Wir betrachten die Funktion f auf $\mathbb{C}$, die durch

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

gegeben ist.
(a) Zeigen Sie, dass f nur isolierte Singularitäten hat, bestimmen Sie diese und berechnen Sie ihre Residuen dort.
(b) Zeigen Sie, dass für alle $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}\pi$ gilt:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{\sin z} = \pm 2\pi i.$$

Klausurteil Integralsätze

Aufgabe 4: Flächen-Unabhängigkeit (8 Punkte)

Sei $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^3}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) = 0$ für alle $\underline{x} \neq \underline{0}$.

(b) Sei $B_r(\underline{0})$ die Kugel vom Radius r um den Ursprung. Beantworten Sie folgende Fragen ohne Begründung oder Rechnung durch Wissen oder geometrische Überlegung: Wie lautet der Flächeninhalt der Sphäre $S_r(\underline{0}) := \partial B_r(\underline{0})$? Wie lautet der äußere Einheitsnormalenvektor $\underline{n}(\underline{x})$ auf $S_r(\underline{0})$ bei $\underline{x}$?

(c) Zeigen Sie (möglichst knapp), dass $\int_{S_r(\underline{0})} \underline{f} \cdot d\underline{S} = 4\pi$ für alle $r > 0$.

(d) Wo liegt der Fehler in folgendem Argument? Da $\operatorname{div} \underline{f} = 0$, folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, dass $\int_{S_r(\underline{0})} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{B_r(\underline{0})} d^3\underline{x} \operatorname{div} \underline{f} = 0$.

(e) Zeigen Sie: $\int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S} = 4\pi$ für jede (nach außen orientierte) stückweise-C^1-Fläche $\mathcal{F}$, die den Ursprung umschließt, d.h. für die gilt $\underline{0} \notin \mathcal{F} = \partial \widetilde{B}$ mit kompaktem $\widetilde{B} \subset \mathbb{R}^3$ und $\underline{0} \in \widetilde{B}$. (*Tipp*: Es gibt $R > 0$ so, dass $\mathcal{F} \subset B_R(\underline{0})$.)

Aufgabe 5: Divergenz und Gradient (4 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ sei $\underline{f}(\underline{x}) = g(\|\underline{x}\|)\underline{x}$. Finden Sie eine C^1-Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ so, dass $\operatorname{div} \underline{f} = 5\|\underline{x}\|^2$. Zeigen Sie außerdem, dass $\underline{f}$ ein Gradientenfeld ist, und finden Sie eine Stammfunktion F von $\underline{f}$.