Script
zur
Vorlesung

Mathematik für Physiker IV
– Funktionentheorie –

Prof. Dr. Frank Loose SS 2008
Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Florian Jessen
Jessen@pit.physik.uni-tuebingen.de

05. Oktober 2008

Made with $\LaTeX 2\varepsilon$

Vorwort

Dieses Script vervollständigt die Reihe Mathematik für Physiker, ist allerdings nicht mehr speziell einem Semester zugeordnet. Es basiert auf der Vorlesung „Mathematik für Physiker IV“ des Sommer-Semesters 2008, da dieser Teil „Funktionentheorie“ zu meiner Zeit nicht Inhalt der Vorlesung war. Sofern Definitionen, Sätze, ... aus anderen Scripten dieser Serie zitiert werden, so sind diese auch hier wieder mit MfPh... kenntlich gemacht. Es wird dabei nicht garantiert, dass sich keine Fehler, sowohl in Formeln, als auch in den Formulierungen von Definitionen, Sätzen oder auch Beweisen einschleichen. Der Leser sollte daher entsprechend kritisch damit umgehen und gefundene Fehler weitergeben, damit diese korrigiert werden können.

In der Mathematik unterscheiden sich die verwendeten Symbole zum Teil grundlegend von der Physik, so zum Beispiel die kompelexe Konjugation, Adjungation oder auch die Schreibweise des Skalarproduktes (Dirac-Notation in der Quanten-Mechanik!). Als gleichwertig für die Transposition sind zu werten ${}^{T}A$, A^T, A^t. Besonders kritisch ist auch die Komplexe Konjugation mit z^* oder $\overline{z}$, da hier leicht Fehlinterpretationen auftreten können.

Wer die schönen Bilder aus der Vorlesung vermissen sollte, ist hiermit aufgerufen diese in digitaler Form (png, eps, o.ä.) zu erstellen, damit diese integriert werden können. Gleiches gilt für anderweitige Mitarbeit am Gesamtwerk. Kenntnisse im Umgang mit $\LaTeX 2\varepsilon$ sind dabei hilfreich.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Holomorphe Funktionen

14.04.2008

Motivation

(1) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar, so ist ihre Taylor-Reihe in 0 gegeben durch:

$$T_0 f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n \ .$$

(2) Erinnere:

- $T_0 f$ ist eine *formale Potenzreihe* (mit einer Unbestimmten X, in die man „etwas einsetzen“ kann);
- $T_0 f$ braucht für kein $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ zu konvergieren;
- es gibt ein $R \in [0, \infty]$, so dass $T_0 f$ auf $(-R, R)$ konvergiert, aber auf $\mathbb{R} \backslash [-R, R]$ divergiert (R heißt *Konvergenzradius*);
- Selbst wenn $R > 0$ ist braucht $f(x)$ nicht gleich $T_0 f(x)$ für $|x| < R$ zu sein (außer für $x = 0$);
- f hieß *reell-analytisch in* $a = 0$, wenn der Konvergenzradius R von $T_0 f$ größer als Null ist und für alle $x \in (-r, r)$ (mit einem $0 < r < R$) gilt:

$$f(x) = T_0 f(x) \ .$$

(3) Ist

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

beliebige Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so konvergiert T auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Allerdings ist dann auch $T(z) \in \mathbb{C}$ (und nun dürfte man auch von Vorneherein die Koeffizienten a_n aus $\mathbb{C}$ zulassen). Man erhält dann eine Funktion

$$f : B_R(0) \to \mathbb{C} \,, \ f(z) = T(z) \ .$$

(4) Anwendung auf eine reell-analytische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ in $a = 0$ liefert also nun eine Fortsetzung:

$$\hat{f} : B_r(0) \to \mathbb{C} \,, \ \hat{f}(z) = T_0 f(z)$$

(d.h. $\hat{f}(x) = f(x) \ \forall x \in (-R, R)$ mit einem $0 < r < R$).

Beispiel
Für $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt bekanntllich

$$f(x) = \exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ ,$$

also ist exp reell-analytisch in $a = 0$ und $R_0 = \infty$. Deshalb ist auch

$$\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ , \ \hat{f}(z) =: \exp(z) =: e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

erklärt und heißt *komplexe Exponentialfunktion*. Wir hatten schon gesehen:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

(EULER).

Erkenntnis
Erst die komplexen Fortsetzungen zeigen die ganze Natur der reell-analytischen Funktionen (und oft überraschende Zusammenhänge)!

Ziel
Untersuche systematisch Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$, wo $G \subseteq \mathbb{C}$ $(= \mathbb{R}^2)$ ein Gebiet ist, die „ $\mathbb{C}$ -differenzierbar“ sind.

1.1 Komplexe Zahlen

1.1.1 Erinnerung

Auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ definiert man eine „Multiplikation“ $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix} \ . \tag{1.1}$$

Es ist dann $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ ein Körper und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet: die *komplexen Zahlen*.

1.1.2 Kommentar

(1) Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das Eins-Element dieses Körpers, also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \ .$$

(2) Man kann $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ als *Unterkörper* von $\mathbb{C}$ vermöge $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \, , \tau(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ auffassen, denn:

$$\tau(x+y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \tau(x) + \tau(y)$$

und

$$\tau(x \cdot y) = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \tau(x) \star \tau(y)$$

(und τ ist injektiv).

(3) Die skalare Multiplikation $\mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und die neu definierte multiplikative Struktur $\star : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}$ sind vermöge τ verträglich, d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$r \cdot z = \tau(r) \star z \ ,$$

denn

$$r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tau(r) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

Es wird ab sofort deshalb $x \in \mathbb{R}$ mit $\tau(x) \in \mathbb{C}$ identifiziert und „$\star$“ als „$\cdot$“ geschrieben (oder sogar als „ “).

(4) Führt man insbesondere mit der Abkürzung $i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die *imaginäre Einheit* ein (es ist dann also $(1, i)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$), so hat man für jedes $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = x + iy \ ;$$

die übliche Darstellung der komplexen Zahlen. Es heißt dann $x =: \Re(z)$ der *Realteil von* z und $y =: \Im(z)$ der *Imaginärteil von* z.

(5) Um sich die grundlegenden Multiplikationsregel Gleichung (1.1) in $\mathbb{C}$ zu merken, muss man sich nur

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

merken, denn wegen $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$ und den Körpergesetzen findet man dann:

$$(x_1 + iy_1) \star (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \ .$$

(6) Man kann $\mathbb{R}^3$ <u>nicht</u> mit einer so schönen Multiplikation versehen. ✎ *Übung* ✎

(7) Es ist dann

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad , \quad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \ ,$$

wenn man für $z = x + iy$ das *komplex Konjugierte*

$$\overline{z} = x - iy$$

setzt. Erinnere auch den *Betrag* $|-| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$,

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \ , \text{ wenn } z = x + iy$$

ist. Es ist dann für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$$

und

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \ .$$

(8) Für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $(= \mathbb{C}^*)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes r $(= |z|)$ und ein (bis auf Vielfache von 2π eindeutiges) $\varphi \in \mathbb{R}$ (Argument von φ) mit:

$$z = re^{i\varphi}$$

(Polardarstellung der komplexen Zahlen). Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ist dann wegen

$$e^{i(x_1 + x_2)} = e^{ix_1} \cdot e^{ix_2}$$

(Additionstheoreme von sin und cos und Eulers Formel anwenden):

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \ .$$

Also ist die geometrische Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$:

- Beträge werden multipliziert;
- Argumente werden addiert.

1.1.3 Vorbereitungen

Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Betrachtet man $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ als 1-dimensionalen komplexen Vektorraum, so wird eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschrieben durch eine Matrix $(\lambda) \in \mathrm{Mat}_1(\mathbb{C})$,

$$Sz = \lambda z .$$

Frage: Wie hängen $\mathrm{Mat}_1(\mathbb{C})$ und $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ zusammen?

1.1.4 Bemerkung

Für eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(1) T ist $\mathbb{C}$ -linear;

(2) $T(iz) = iTz, \forall z \in \mathbb{C}$;

(3) ist

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} ,$$

so ist $a = d$ und $b = -c$. Es ist dann mit $\lambda := a + ic$:

$$Tz = \lambda z .$$

¡? Beweis ¿!

(1) ⇒ (2): $\mathbb{C}$ -Linearität für T bedeutet insbesondere:

$$T(\mu z) = \mu T z , \ \forall \mu \in \mathbb{C} , \ \forall z \in \mathbb{C} ;$$

insbesondere also für $\mu = i$.

(2) ⇒ (3): Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$ wird (bzgl. der $\mathbb{R}$ -Basis $(1, i)$) beschrieben durch

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bedingung (2) bedeutet deshalb:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = d , \, b = -c .$$

Es ist dann

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{pmatrix} ,$$

also mit $\lambda := a + ic$:

$$Tz = \lambda z .$$

(3) ⇒ (1): $T(z) = \lambda z$ (mit $\lambda \in \mathbb{C}$) ist offenbar $\mathbb{C}$ -linear, denn

$$T(\mu z) = \lambda(\mu z) = \mu(\lambda z) = \mu T z , \ \forall \mu, z \in \mathbb{C} .$$

QED$_\blacktriangle$

1.2 Differenzieren

1.2.1 Erinnerung

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ komplex-wertige Funktion auf G und $a \in G$. f ist in a (reell-) differenzierbar, wenn es eine $\underline{\mathbb{R}}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt und eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{\varphi(z)}{|z-a|} = 0 \ ,$$

so dass gilt:

$$f(z) = f(a) + T(z-a) + \varphi(z) \ .$$

Man schreibt dann $T =: Df(a)$. Setzen wir noch $u, v : G \to \mathbb{R}$, $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$, also $f = u + iv$, so erhält man:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (a)$$

(wenn man T mit ihrer sie beschreibenden Matrix bzgl. $(1, i)$ identifiziert).

Definition 1.1.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(a) Sei $a \in G$. Dann heißt f in a *komplex-differenzierbar*, wenn f (reell-) differenzierbar ist <u>und</u> $Df(a)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist.

(b) Es heißt f *holomorph*, wenn f in jedem Punkt $z \in G$ komplex-differenzierbar ist. Wir bezeichnen:

$$H(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \middle| f \text{ ist holomorph} \right\} \ .$$

1.2.2 Kommentar

Ist $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist also f genau dann holomorph, wenn die sogenannten *Cauchy-Riemannschen-Differenzialgleichungen* gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

1.2.3 Vorbereitung

Sei $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die ($\mathbb{R}$) lineare Abbildung, die die komplexe Konjugation beschreibt, $Iz = \overline{z}$. Dann wird I (bzgl. $(1, i)$) beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

1.2.4 Bemerkung

Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(1) Es gibt dann genau eine Wahl von $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $S_1, S_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$T = S_1 + S_2 \circ I \ .$$

(2) Ist $T = S_1 + S_2 \circ I$ wie oben, $\xi = T(1) \in \mathbb{C}$ und $\eta = T(i) \in \mathbb{C}$ sowie $S_1 z = \lambda_1 z$ und $S_2 z = \lambda_2 z$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, so gilt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\xi - i\eta) \ , \ \lambda_2 = \frac{1}{2}(\xi + i\eta) \ .$$

¡? Beweis ¿!

(1) Wir identifizieren jedes $\mathbb{C}$ -lineare $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, also $Sz = \lambda z$ und $\lambda = x + iy$ mit

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \ .$$

Die Bedingung $T = S_1 + S_2 \circ I$ wird dann mit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \ ,$$

also:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = a \\ \\ x_1 - x_2 = d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(a+d) \\ x_2 = \frac{1}{2}(a-d) \end{array} \ ,$$

sowie

$$\left.\begin{array}{r} -y_1 + y_2 = b \\ \\ y_1 + y_2 = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2}(-b+c) \\ y_2 = \frac{1}{2}(b+c) \end{array} \ .$$

Also existieren S_1, S_2 und sind eindeutig bestimmt.

(2) Mit obigen Bezeichnungen ist

$$\xi = T(1) = a + ic \ , \ \eta = T(i) = b + id \ .$$

Es folgt mit (1):

$$\begin{aligned} \lambda_1 = x_1 + iy_1 &= \frac{1}{2}\Big((a+d) + i(-b+c)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((a+ic) - i(b+id)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\xi - i\eta) \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\xi + i\eta) \ .$$

QED$_\blacktriangle$

1.2.5 Kommentar

(1) Ist $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -linear, $\xi = T(1)$ und $\eta = T(i)$, so ist also für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$Tz = \left(\frac{1}{2}(\xi - i\eta)\right) z + \left(\frac{1}{2}(\xi + i\eta)\right) \overline{z} \ .$$

(2) Ist $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ wie oben, so ist T also genau dann $\mathbb{C}$ -linear, wenn

$$\frac{1}{2}(\xi + i\eta) = 0$$

ist.

(3) Ist nun $T = Df(a)$ für eine in $a \in G$ differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ (G ein Gebiet), so ist mit $f = u + iv$, also $Df(a) = \begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix}(a)$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &:= \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) &= (Df(a)(1) = \xi) \ , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &:= \frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(a) &= (Df(a)(i) = \eta) \ . \end{aligned}$$

Man setzt daher:

Definition 1.2.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ in a (reell-) differenzierbar. Dann heißen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(a) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \ , \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \ , \end{aligned}$$

die *Wirtinger-Ableitungen* von f nach z bzw. $\overline{z}$ in a.

1.2.6 Kommentar

(1) Ist $f : G \to \mathbb{C}$ in $a \in G$ differenzierbar ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet), so ist also für alle $z \in G$:

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\overline{(z-a)} + \varphi(z)$$

mit einem $\varphi : G \to \mathbb{C}$, welches

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{\varphi(z)}{|z-a|} = 0$$

erfüllt. Nach der Bedingung gilt nämlich mit den eingeführten Bezeichnungen

$$Df(a)(z-a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\overline{(z-a)} \ .$$

(2) Eine differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) ist also genau dann holomorph, wenn gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \ .$$

Satz 1.3.
Sei $G \to \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann in a komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

für $z \longrightarrow a$ existiert. Dieser ist dann $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

1.2.7 Kommentar

(1) Man hätte also wie im Falle einer reellen Veränderlichen die Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten auch zur Definition der komplexen Diffenenzierbarkeit machen können. Man beachte, dass man ja hier für $z \neq a$ wie im Reellen durch $z - a$ teilen darf, weil $\mathbb{C}$ ja ein Körper ist (im Gegensatz zu $x - a$ für $x, a \in \mathbb{R}^n$ bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$, $x \neq a$). Man schreibt deshalb auch für eine komplex-differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ in a:

$$f'(a) := \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \ .$$

(Beachte: $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$ ist auch im (reell-) differenzierbaren Fall erklärt, $f'(a)$ nur im komplex-differenzierbaren, wenn also $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ ist.)

(2) Man könnte deshalb die Rechenregeln von Satz 1.4. auch ganz analog wie im Fall einer reellen Veränderlichen beweisen. (Wir bevorzugen einen anderen Weg.)

¡? Beweis ¿! von Satz 1.3.

$\Rightarrow$ Ist $f : G \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar in a, so ist also

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - a) + \varphi(z)$$

mit

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{\varphi(z)}{|z - a|} = 0 \ .$$

Es ist also

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \frac{\partial f}{\partial z}(a) \right| = \left| \frac{\varphi(z)}{z - a} \right| \ \overset{z}{\underset{a}{\longrightarrow}} \ 0 \ ,$$

also existiert der Grenzwert des Differenzenquotioenten und es ist

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \ .$$

$\Leftarrow$ Existiert andererseits der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lambda := \lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \ ,$$

so ist mit $\varphi : G \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) := f(z) - f(a) - \lambda(z - a)$$

natürlich

$$f(z) = f(a) + \lambda(z - a) + \varphi(z)$$

und

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{\varphi(z)}{z - a} = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \lambda = 0 \ .$$

Also ist f in a reell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \lambda \ , \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0 \ ,$$

d.h. f ist komplex-differenzierbar.

QED$_{\blacktriangle}$

1.3 Rechenregeln

Satz 1.4.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ in $a \in G$ komplex-differenzierbar. Dann gilt:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $f + g, \lambda f : G \to \mathbb{C}$ in a komplex-differenzierbar mit:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad , (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \ ;$$

(b) $fg : G \to \mathbb{C}$ ist in a komplex-differenzierbar mit

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ ;$$

(c) Ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist auch $\frac{f}{g} : G \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar in a mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \ ;$$

(d) Sei $h : D \to \mathbb{C}$ mit einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f(G) \subseteq D$. Ist dann h komplex-differenzierbar in $b := f(a) \in D$, so ist auch $h \circ f : G \to \mathbb{C}$ in a differenzierbar mit

$$(h \circ f)'(a) = h'(b)f'(a) \ .$$

¡? Beweis ¿!
Die Operatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ sind linear und erfüllen auch die Leibnizsche Produktregel. Deshalb gilt das Gleiche auch für

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \ .$$

(a) Es folgt deshalb z.B.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f+g)(a) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(a) = 0 \ ,$$

also $f + g$ komplex-differenzierbar und dann

$$(f+g)'(a) = \frac{\partial}{\partial z}(f+g)(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial z}(a) = f'(a) + g'(b) \ .$$

Ähnliches gilt für λf.

(b) Ähnlich zu (a).

(c) Ähnlich zu (a).

(d) Ist $S_1 = Df(a)$ und $S_2 = Dh(b)$, so folgt zunächst aus der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen, dass $h \circ f : G \to \mathbb{C}$ in a (reell-) differenzierbar ist mit:

$$D(h \circ f)(a) = Dh(b) \circ Df(a) = S_2 S_1 \ .$$

Aber die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $S_2 S_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist mit S_1 und S_2 auch $\mathbb{C}$ -linear, denn mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$S_1 S_2 J = S_2(J S_1) = J S_2 S_1 \ ,$$

also ist $h \circ f$ in a komplex-differenzierbar und es gilt:

$$(h \circ f)'(a) = D(h \circ f)(a) = S_2 S_1 = h'(b)f'(a) \ .$$

QED▲

1.3.1 Beispiele

(I) Sei $c \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = c\,,\ \forall z \in \mathbb{C}$. Dann folgt: f ist differenzierbar mit $Df = 0$, also

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0\ ,$$

d.h. f ist holomorph und

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = 0\ .$$

(II) Sei $f = \text{ id } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, also $f(z) = z$. Dann ist f differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) = \frac{1}{2}(1+i^2) = 0\ ,$$

also f holomorph und

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}(1-i^2) = 1 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

(III) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Dann gilt: f ist differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x-iy) = \frac{1}{2}(1-i^2) = 1 \neq 0\ ,$$

also ist f <u>nicht</u> holomorph.

(IV) Ist $n \in \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n =: \text{pot}_n(z)$. Dann ist f holomorph und

$$f'(z) = nz^{n-1}\ ,$$

denn für $n = 0$ (siehe (I)) und für $n \longrightarrow n+1$: $f(z) = z^{n+1} = z \cdot z^n$. $g = \text{ id }$ ist holomorph (nach (II)), $h = \text{pot}_n$ nach Induktionsvoraussetzung. Nach Satz 1.4.(b) ist deshalb $f = \text{pot}_{n+1}$ holomorph und

$$f'(z) = g'(z)h(z) + g(z)h'(z) = 1 \cdot z^n + z(nz^{n-1}) = (n+1)z^n\ .$$

(V) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

(f heißt *Polynomfunktion*). Nach (IV) und Satz 1.4.(a) ist f holomorph und es gilt:

$$f'(z) = na_n z^{n-1} + \cdots + a_1 = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}z^k\ .$$

(VI) Sei $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ $(= \frac{1}{z^{-n}})$. Nach Satz 1.4.(c) ist f holomorph und es gilt:

$$f'(z) = \frac{-(-n)\cdot z^{-n-1}}{(z^{-n})^2} = +nz^{2n-n-1} = nz^{n-1}\ .$$

(VII) Seien $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynomfunktionen, $q \neq 0$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von q (sind höchstens $\deg(q)$ Stück, wegen Division mit Rest, ✎ *Übung* ✐). Dann ist

$$f : \mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

nach Satz 1.4.(c) holomorph und es ist

$$f'(z) = \frac{p'q - pq'}{q^2}(z)$$

mit p' und q' aus (V).

(VIII) Man möchte eigentlich nun auch weitere bekannte Funktionen „holomorph fortsetzen" wie $\sqrt{\cdot}, \exp, \ln, \sin, \cos, \tan, \arctan, \arccos, \sinh, \ldots$ (Erst später möglich).

Kapitel 2

Stammfunktionen

27.04.2008

Motivation

„ $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit“ ist nun geklärt, was ist „ $\mathbb{C}$ -Integrierbarkeit“? Präziser die Frage: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Wann hat f eine *Stammfunktion*, d.h. eine Funktion $F \in H(G)$ mit

$$F' = f \ ?$$

Erinnerung

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$$

(bei einem festen $x_0 \in I$) eine Stammfuntion!

Problem

Sei $z_0 \in G$ fest. Was soll „$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\ d\zeta$“ bedeuten?

2.1 Stückweise glatte Wege

Definition 2.1.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to G$ heißt ein *stückweise glatter Weg* in G, wenn es eine Zerlegung $(t_0, \ldots, t_m)$ von $[a, b]$ gibt (d.h. $a = t_0 < \cdots < t_m = b$), so dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ glatt ist (d.h. beliebig oft differenzierbar), für $j = 1, \ldots, m$.

(b) Ein stückweise glatter Weg $\gamma : [a, b] \to G$ heißt *geschlossen*, wenn gilt:

$$\gamma(a) = \gamma(b)\ .$$

Definition 2.2.
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) und $\gamma : [a, b] \to G$ stückweise glatt. Man setzt dann das *Wegintegral von f über γ*:

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\ dt\ ,$$

wenn γ glatt ist und sonst, wenn $(t_0, \ldots, t_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist, so dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ glatt ist ($j = 1, \ldots, m$):

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\ dz\ .$$

2.1.1 Kommentar

(1) Ist $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $g = u + iv$ (mit $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$), so sei (natürlich)

$$\int_a^b g(t)\ dt := \int_a^b u(t)\ dt + i \int_a v(t)\ dt\ ,$$

wo auf der rechten Seite die *Riemann-Integrale* von u bzw. v gemeint sind.

(2) Es gelten dann die bekannten Integrationsregeln auch für $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen auf $[a, b]$, wie zum Beispiel:

- partielle Integration (p.I.)
- Substitutionsregel (SR)
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HS)

✎ *Übung* ✐

(3) Physiker merken sich das komplexe Wegintegral so: mit $z = \gamma(t)$ ist

$$dz = \frac{dz}{dt}\ dt = \dot{\gamma}(t)\ dt\ .$$

(4) Das Wegintegral ändert sich nicht unter einer *orientierungserhaltenden Umparametrisierung* von $\mathcal{C} := \operatorname{Bild}(\gamma) \subseteq G$, d.h.: ist $\tau : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ glatt und bijektiv mit $\tau' > 0$ (also $\tau(\alpha) = a$ und $\tau(\beta) = b$), so gilt

$$\int_{\gamma\circ\tau} f(z)\ dz = \int_\gamma f(z)\ dz\ ,$$

denn

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\tau} f(z)\ dz &= \int_\alpha^\beta f\big(\gamma\circ\tau(s)\big)(\gamma\circ\tau)'(s)\ ds \\
&\overset{\substack{\text{Ketten}\\\text{Regel}}}{=} \int_\alpha^\beta f\circ\gamma\big(\tau(s)\big)\dot{\gamma}\big(\tau(s)\big)\tau'(s)\ ds \\
&\overset{\text{SR}}{=} \int_a^b f\circ\gamma(t)\dot{\gamma}(t)\ dt \\
&= \int_\gamma f(z)\ dz\ .
\end{aligned}$$

Ändert man die Orientierung von $\mathcal{C}$ durch einen orientierungsumkehrenden Parameterwechsel τ (also $\tau' < 0$), so erhält man:

$$\int_{\gamma\circ\tau} (\ldots) = -\int_\gamma (\ldots)\ .$$

Statt $\int_\gamma f(z)\,dz$ schreibt man daher auch $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz$, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Bild}\,(\gamma)$ ist (und die Orientierung von $\mathcal{C}$ klar ist).

2.2 Geschlossene Wege

2.2.1 Beobachtung

(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to I$ geschlossener Weg, so ist

$$\int_\gamma f(x)\,dx = \int_a^b f\circ\gamma(t)\dot\gamma(t)\,dt = 0\ ,$$

denn jedes Stück von $\mathcal{C}$ wird notwendiger Weise in beide Richtungen durchlaufen. Präzise: Ist $f = F'$ dann folgt

$$\int_\gamma f(x)\,dx = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\gamma)\dot{}(t)\,dt \overset{\text{HS}}{=} F\circ\gamma(t)\Big|_a^b = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) = 0\ .$$

Ist aber $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, so gibt es viele geschlossene Wege in G!

(2) Fundamental: Nun wird es für ein stetiges $f : G \to \mathbb{C}$ zu einer echten Bedingung dafür, dass f eine Stammfunktion besitzt: Für alle geschlossenen Wege in G muss gelten:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\ .$$

¡? Beweis ¿!

Ist $F : G \to \mathbb{C}$ (reell-) differenzierbar und $\gamma : [a,b] \to G$ glatter Weg, so gilt nach der Kettenregel:

$$(F\circ\gamma)\dot{}(t)t = DF\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t) \overset{1.2.5}{=} \frac{\partial F}{\partial z}\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t) + \frac{\partial F}{\partial \bar z}\big(\gamma(t)\big)\overline{\dot\gamma(t)}\ ,$$

insbesondere für ein holomorphes F:

$$(F\circ\gamma)\dot{}(t) = F'\circ\gamma(t)\dot\gamma(t)\ .$$

Deshalb ist nun (wie im reellen Fall) für $f : G \to \mathbb{C}$ stetig mit $f = F'$, einem $F \in H(G)$ und einem geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to G$ (also $\gamma(a) = \gamma(b)$):

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'\circ\gamma(t)\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\gamma)\dot{}(t)\,dt = F\circ\gamma(t)\Big|_a^b = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(b)\big) = 0\ .$$

QED$_\blacktriangle$

2.2.2 Beispiele

(I) $f = \mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion, z.B. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2$$

(siehe 1.3.1(IV)). Tatsächlich ist z.B. für den geschlossenen Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\quad ,\quad \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$$

$\dot\gamma(t) = -\sin t + i\cos t = ie^{it}$ und damit

$$\int_\gamma z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{it}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt = i\frac{1}{2i}e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4\pi i} - 1\right) = 0\ .$$

(II) $f = I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (vgl. 1.2.3), also $f(z) = \overline{z}$, kann dagegen keine Stammfunktion haben, denn für das gleiche γ wie unter I gilt nun:

$$\int_\gamma \overline{z}\ dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it}\ dt = i \int_0^{2\pi}\ dt = 2\pi i \neq 0\ .$$

(III) Sei $n \in \mathbb{Z}$, aber $n \neq -1$. Dann hat $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ eine Stammfunktion (vgl. 1.3.1(VI)), nämlich

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}\ ,$$

also muss auch

$$\int_\gamma z^n\ dz = 0$$

sein, für γ wie oben und $n \neq -1$.

(IV) Allerdings: Ist

$$S^1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \ |z|^2 = 1 \right\} = \mathrm{Bild}\,(\gamma)$$

mit γ wie oben, so ist für $z \in S^1$:

$$\overline{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}\ .$$

Also ist

$$2\pi i = \int_\gamma \overline{z}\ dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\ dz\ !$$

Damit kann $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion (auf $\mathbb{C}^*$) haben: Es gibt keinen holomorphen Logarithmus auf ganz $\mathbb{C}^*$!

2.3 Integrierbarkeit

Definition 2.3.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig.

(a) Man sagt: f *hat eine Stammfunktion*, wenn es eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

$$F' = f\ .$$

(b) Man sagt: f *ist integrierbar*, wenn für jeden stückweise glatten und geschlossenen Weg γ in G gilt:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0\ .$$

2.3.1 Kommentar

(1) Eine Stammfunktion F von $f : G \to \mathbb{C}$ ist – wenn sie existiert – bis auf eine additive Konstante (in $\mathbb{C}$) eindeutig bestimmt. Gilt nämlich für eine holomorphes $H : G \to \mathbb{C} : H' = 0$, so ist also

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = H' = 0\ ,$$

also $DH = 0$. Also ist $H = const.$ (vgl. Kapitel 3).

(2) Sind $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to G$ zwei Wege mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, so setzen wir $\gamma_1 \star \gamma_2 : [0,1] \to G$,

$$\gamma_1 \star \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} .$$

Es ist dann auch $\gamma_1 \star \gamma_2$ stückweise glatter Weg in G. (Durchlaufe zunächst γ_1, dann γ_2.) Für $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist dann:
✎ *Übung* ✐

$$\int_{\gamma_1 \star \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz .$$

(3) Für $\gamma : [0,1] \to G$ stückweise glatt bezeichne $\gamma^- : [0,1] \to G$,

$$\gamma^-(t) := \gamma(1-t)$$

den *rückwärtsdurchlaufenen Weg*. Es ist dann: ✎ *Übung* ✐

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz .$$

(4) Stetige Funktionen mit Stammfunktionen sind nach 2.2.1(2) integrierbar. Aber haben integrierbare Funktionen auch eine Stammfunktion (oder gibt es weitere Hindernisse dagegen)?

Nun hat man gute Chancen, denn man hat nun – ähnlich wie im Reellen – einen Kandidaten durch

$$F : G \to \mathbb{C}\ ,\ F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta\ ,$$

wobei man nun $z_0 \in G$ fixiert und für $\gamma_z : [0,1] \to G$ einen beliebigen Weg von z_0 nach z wählt ($\gamma_z(0) = z_0\ ,\ \gamma_z(1) = z$).

Es kommt nämlich wegen der Integrierbarkeit von f nicht darauf an, welchen Weg γ_z man wählt: $F(z)$ ist wohldefiniert. Ist nämlich $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to G$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z$, so ist $\gamma_1(1) = \gamma_2^-(0)$ und damit $\gamma_1 \star \gamma_2$ ein stückweise glatter Weg von $\gamma_1(0) = z_0$ nach $\gamma_2^-(1) = \gamma_2(0) = z_0$, also geschlossen. Es folgt:

$$0 = \int_{\gamma_1 \star \gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

und damit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz .$$

Tatsächlich, es gilt:

Satz 2.4.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Es hat f genau dann eine Stammfunktion, wenn f integrierbar ist.

¡? Beweis ¿!

$\Rightarrow$ Siehe 2.2.1(2)

$\Leftarrow$ Wähle $z_0 \in G$ und für jedes $z \in G$ einen stückweise glatten Weg γ_z von z_0 nach z. Setze nun $F : G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta .$$

Behauptung: F ist holomorph und $F' = f$.

Sei $a \in G$ beliebig (aber fest). Für z nahe bei a ist die geradlinige Verbindung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = (1-t)a + tz \quad (\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = z - a)$$

ganz in G (weil G offen ist). Weil nun $\gamma_a \star \gamma \star \gamma_z^-$ geschlossener Weg in G ist, ist:

$$\int_{\gamma_a} f + \int_{\gamma} f - \int_{\gamma_z} f = \int_{\gamma_a \star \gamma \star \gamma_z^-} = 0 \ ,$$

also

$$\int_{\gamma_z} f - \int_{\gamma_a} f = \int_{\gamma} f \ .$$

Nun ist (ganz wie im Reellen):

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{z-a} \left(\int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta - f(a)(z-a) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{z-a} \int_0^1 \Big(f \circ \gamma(t) \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{=z-a} - f(a)(z-a) \Big)\, dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |f \circ \gamma(t) - f(a)| \ dt
\end{aligned}$$

Aber weil nun $\gamma(t)$ nahe bei a bleibt, für alle $t \in [0,1]$, gilt für

$$\delta(z) := \sup_{t \in [0,1]} |f \circ \gamma(t) - f(a)|$$

wegen der Stetigkeit von f in a: $\lim_{z \longrightarrow a} \delta(z) = 0$. Also

$$\left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| \leq \delta(z) \ \underset{a}{\overset{z}{\longrightarrow}} \ 0 \ .$$

Es ist also F komplex-differenzierbar in a und es ist $F'(a) = f(a)$.

QED$_\blacktriangle$

Kapitel 3

Cauchys Integralsatz

01.05.2008

Motivation

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Welche stetigen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ sind denn nun integrabel (und haben damit eine Stammfunktion)? Wir untersuchen diese Frage zunächst nur für Kreisscheiben $B \subseteq \mathbb{C}$. Wir nennen $B \subseteq \mathbb{C}$ eine *Kreisscheibe*, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \, |z - a| < r \right\} =: B_r(a)$$

ist.

3.1 Achsenparallele Rechtecke

Lemma 3.1.
Sei $B \subseteq \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $f : B \to \mathbb{C}$ stetig. Für alle achsenparallelen Rechtecke $R \subseteq B$ gelte:

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0 \; .$$

Dann ist f integrabel.

3.1.1 Kommentar

(1) Unter einem *achsenparallelen Rechteck* verstehen wir eine Menge

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| r_1 \le \Re(z) \le r_2, s_1 \le \Im(z) \le s_2 \right\}$$

für $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 < r_2$ und $s_1 < s_2$. Da R beschränkt und abgeschlossen ist, ist R kompakt.

(2) Unter $\mathcal{C} = \partial R$ verstehen wir den *orientierten Rand* von R (vgl. 2.1.1(4)), d.h. den stückweise glatten Weg

$$\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2 \star \gamma_3 \star \gamma_4 \quad \text{(Bild)} \; ;$$

das Kompaktum-Innere muss „links" liegen:

$$\int_{\partial R} := \int_{\gamma} \; .$$

(Man sagt auch: *R hat einen stückweise glatten Rand.*)

(3) Man beachte also: Ist $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ zunächst nur für die geschlossenen Wege, die Rand von achsenparallelen Rechtecken sind, so folgt, dass $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, für alle geschlossenen Wege γ (wegen Lemma 3.1., Satz 2.4. und 2.2.1(2)).

¡? Beweis ¿! von Lemma 3.1. (vgl. Satz 2.4.)

Für $z \in B = B_r(a)$ bezeichne $\gamma_z : [0,1] \to B$ den Weg, der von a nach z geradlinig achsenparallel über $\Re(a) + i\Im(z)$ führt und $\tau_z : [0,1] \to B$ jenen, der über $\Re(z) + i\Im(a)$ von a nach z führt. Ist $R \subseteq B$ das Rechteck mit

$$\partial R = \tau_z \star \gamma_z^- \ ,$$

so gilt nach Voraussetzung $\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$, also

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\ d\zeta = \int_{\tau_z} f(\zeta)\ d\zeta \ .$$

Setze nun: $F : B \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\ d\zeta \quad \left(= \int_{\tau_z} f(\zeta)\ d\zeta \right) \ .$$

Behauptung: $F \in H(B)$ und $F' = f$.
Sei dazu $h \in (-\varepsilon, \varepsilon), h \neq 0$ (und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $z + h \in B$ ist). Dann ist:

$$\left| \frac{1}{h} \big(F(z+h) - F(z) \big) - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_\gamma f(\zeta)\ d\zeta - f(z) \right|$$

mit $\gamma : [0,1] \to B$, $\gamma(t) = z + th$, also $\dot\gamma(t) = h\ ,\ \forall t \in [0,1]$. Es folgt:

$$|\ldots| = \left| \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) \cdot h\ dt - \int_0^1 f(z)\ dz \right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\ dt \leq \delta(h) \ ,$$

wenn man

$$\delta(h) := \sup_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)|$$

setzt. Die Stetigkeit von f in z impliziert dann: $\delta(h) \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$. Es folgt: F ist stetig partiell nach x differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z) \quad , \quad \forall z \in B \ .$$

Die Verwendung von $F(z) = \int_{\tau_z} f(\zeta)\ d\zeta$ impliziert nun in ähnlicher Weise, dass auch

$$\left| \frac{1}{h} \Big(F(z+ih) - F(z) \Big) - i f(z) \right| \xrightarrow[0]{h} 0 \ ,$$

also auch F stetig partiell differenzierbar nach y ist mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = i f(z) \quad , \quad \forall z \in B \ .$$

Nach MfPh3Diff Satz 4.9. ist also f (total reell-) differenzierbar und es ist:

$$2 \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar z}(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) + i \frac{\partial F}{\partial y}(z) = f(z) + i^2 f(z) = 0 \ ,$$

also $F \in H(B)$ und

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(z) - i \frac{\partial F}{\partial y}(z) \right) = \frac{1}{2} \left(f(z) - i^2 f(z) \right) = f(z) \ .$$

QED$_\blacktriangle$

Fundamental und bereits ein Spezialfall des Cauchy'schen Integralsatzes ist nun:

Lemma 3.2. von Goursat
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes achsenparallele Rechteck $R \subseteq G$:

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0\ .$$

¡? Beweis ¿!

Setze $R_0 := R$ und zerlege R_0 in vier achsenparallele Rechtecke $R_0^{(1)}, \dots, R_0^{(4)}$ durch Halbierung der Seiten. Es gilt dann

$$\int_{\partial R_0} f(z)\ dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_0^{(j)}} f(z)\ dz\ .$$

Bezeichne nun R_1 ein Rechteck der vier Möglichkeiten $R_0^{(1)}, \dots, R_0^{(4)}$, so dass $\int_{\partial R_1} f(z)\ dz$ betragsmäßig die anderen drei dominiert. Es ist dann:

$$\left| \int_{\partial R_0} f \right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial R_0^{(j)}} f \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial R_1} f \right|\ .$$

Setze dieses Verfahren nun interativ fort und erhalte eine Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von achsenparallelen Rechtecken mit

(i) $R_{n+1} \subseteq R_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\left| \int_{R_n} f(z)\ dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{R_{n+1}} f(z)\ dz \right|$.

Wegen MfPh3Diff Proposition 3.6. (Schachtelungsprinzip) und ($\mathrm{diam} R_n \longrightarrow 0$) existiert nun (genau) ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} R_n\ .$$

Komplexe Differnzierbarkeit von f in a liefert nun, dass

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \varphi(z)$$

mit einem $\varphi : G \to \mathbb{C}$ und

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{\varphi(z)}{z-a} = 0\ . \tag{3.1}$$

Weil nun $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ eine Stammfunktion hat (siehe 1.3.1(V)) und ∂R_n geschlossen ist, folgt:

$$\int_{\partial R_n} f(z)\ dz = \int_{\partial R_n} \varphi(z)\ dz\ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}$ groß genug ist dann für alle $z \in \partial R_n$ wegen Gleichung (3.1):

$$|\varphi(z)| < \varepsilon\, |z-a| < \varepsilon \cdot L[\partial R_n]\ ,$$

wo $L[\partial R_n]$ die Länge der Kurve ∂R_n bezeichnet. Ist nun $d := L[\partial R]$, so ist

$$L[\partial R_n] = \frac{1}{2^n} d$$

und damit gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f(z)\ dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial R_n} f(z)\ dz \right| = 4^n \cdot \left| \int_{\partial R_n} \varphi(z)\ dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot \sup_{z \in \partial R_n} |\varphi(z)| \cdot \underbrace{\left| \int_{\partial R_n} dz \right|}_{\leq L[\partial R_n]} \\ &\leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot L[\partial R_n]^2 = \varepsilon d^2\ , \end{aligned}$$

denn nach MfPh1 Satz 0.0. ist $L[\gamma] = \int_a^b |\dot\gamma| \; dt$ für eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to G$. Also ist:

$$\int_{\partial R} f(z) \; dz = 0 \; .$$

QED$_\blacktriangle$

Korollar 3.3.
Sei $B \subseteq \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f integrabel.

¡? Beweis ¿!

Nach Lemma 3.2. gilt zunächst für die Ränder aller achsenparallelen Rechtecke $R \subseteq B : \int_{\partial R} f(z) \; dz = 0$ und nach Lemma 3.1. zeigt dies, dass $\int_\gamma f(z) \; dz = 0$ ist, für alle geschlossenen Wege in B.
QED$_\blacktriangle$

3.1.2 Kommentar

(1) Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, dass für eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, die integrabel ist, notwendig gilt, dass f schon holomorph ist (siehe Korollar 4.5.). Mit Korollar 3.3. ist damit die Frage nach den integrablen Funktionen auf einer Kreisscheibe $B \subseteq \mathbb{C}$ geklärt:

$$f : B \to \mathbb{C} \;\; \text{integrabel} \quad \Leftrightarrow \quad f \;\; \text{holomorph} \; . \tag{3.2}$$

(2) Hier wird nun klar, dass „die Topologie des Gebietes“ in der Funktionentheorie eine Rolle spielt, denn für $G = \mathbb{C}^*$ gilt die Äquivalenz (Gleichung (3.2)) nicht. Wir wissen ja bereits, dass $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = {}^1\!/_z$, nicht integrabel (aber holomorph) ist.

3.2 Andere Gebiete

Definition 3.4.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Es heißt f *lokal integrabel*, wenn jedes $z \in G$ eine offene Umgebung $U \subseteq G$ besitzt, so dass $f\big|_U : U \to \mathbb{C}$ integrabel ist.

Korollar 3.5.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f lokal integrabel.

¡? Beweis ¿!

Ist $z \in G$, so existiert ein $r > 0$, so dass $U := B_r(z) \subseteq G$ und nach Korollar 3.3. ist $f\big|_U$ dann integrabel.
QED$_\blacktriangle$

3.2.1 Kommentar

(1) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto {}^1\!/_z$, hat keine Stammfunktion nach 2.2.2(IV). Ist aber $B \subseteq \mathbb{C}^*$ eine beliebige Scheibe, so hat $f\big|_B$ eine Stammfunktion. Für $B := B_1(1)$ können wir beispielsweise definieren:

$$\log : B \to \mathbb{C} \quad , \quad \log(z) := \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} \; ,$$

wo $\gamma_z : [0,1] \to B$ der geradlinige Weg von $a = 1$ nach z ist. Es ist dann $\log'(z) = {}^1\!/_z$ für alle $z \in B$ und auch (vgl. MfPh1 Satz 0.0.):

$$\log(x) = \ln(x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 2 \; .$$

(2) Ähnlich wie bei $f := \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = {}^1\!/\!_z$, sieht man auh bei $g : \mathbb{C} \backslash \{\pm i\} =: G \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2} \ ,$$

und $\gamma_\pm : [0, 2\pi] \to G$,

$$\gamma_\pm(t) = \pm i + e^{it} \ ,$$

dass

$$\int_{\gamma_\pm} \frac{dz}{1+z^2} = \pi \neq 0$$

ist ✎ *Übung* ✐. Also gibt es auf G auch keinen Arcustangens! Für

$$B := B_1(0)$$

kan man aber setzen: $\mathrm{Arctan} : B \to \mathbb{C}$

$$\mathrm{Arctan}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \ .$$

Wiederum ist $\mathrm{Arctan}'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ für alle $z \in B$ und $\mathrm{Arctan}(x) = \arctan(x)$, für $-1 < x < 1$.

(3) Kann man Stammfunktionen von $z \mapsto {}^1\!/\!_z$ bzw. $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ auch noch auf größeren Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}^*$ bzw. $G \subseteq \mathbb{C} \backslash \{\pm i\}$ definieren?

(4) Folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Goursat (Lemma 3.2.) werden wir in Kapitel 5 beweisen (siehe MfPh4Int Theorem 7.8., Gaußscher Divergenz-Satz), wobei auch noch genauer geklärt werden muss, was ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ist):

Theorem 3.6. (Cauchy)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$:

$$\int_{\partial K} f(z) \ dz = 0 \ .$$

3.2.2 Kommentar

(1) Insbesondere gilt der Cauchy'sche Integralsatz für Dreiecke $\triangle \subseteq G$ („Lemma von Goursat für Dreiecke"; könnte man genauso beweisen wie Lemma 3.2.). Als Anwendung daraus bekommen wir größere Definitionsgebiete für log und Arctan wie folgt:

(2) Wir sagen: Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $a \in G$ gibt, so dass für alle $z \in G$ die geradlinige Verbingung $[a, z] := \big\{(1-t)a + tz \big| t \in [0, 1]\big\}$ ganz in G liegt.

(3) Nun gilt Korollar 3.3. sogar für sternförmige Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$:

$$f \in H(G) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist integrabel} \ .$$

Man setzt dann nämlich (ähnlich wie im Scheibenfall):

$$F : G \to \mathbb{C} \quad , \quad F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) \ d\zeta \ .$$

Weil nun der Cauchysche Integralsatz für Dreiecke gilt, kann man die Differenz $F(z+h) - F(z)$ durch

$$\int_{[z,z+h]} f(\zeta) \ d\zeta$$

ersetzen, weil $[a, z+h] \cup [z+h, z] \cup [z, a]$ den Rand eines Dreieckes bildet, dass ganz in G liegt. Dann kann man wie in Satz 2.4. bzw. Lemma 3.2. weiter verfahren, um zu sehen, dass $F \in H(G)$ mit $F' = f$ ist.

3.3 Arcustangens und Logarithmus im Komplexen

Definition 3.7.

(a) Sei $G := \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^- = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \neq 0 \vee \Re(z) > 0\}$. Es heißt dann

$$\log : G \to \mathbb{C} \quad , \quad \log(z) = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

der *Hauptzweig des Komplexen Logarithmus*.

(b) Sei $G := \mathbb{C}\backslash\left((i + i\mathbb{R}_0^+) \cup (-i + iR_0^-)\right) = \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) \neq 0 \vee |\Im(z)| < 1\}$. Es heißt dann

$$\text{Arctan} : G \to \mathbb{C} \quad , \quad \text{Arctan}(z) := \int_{[0,z]} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$$

der *Hauptzweig des komplexen Arcustangens*.

3.3.1 Kommentar

(1) Da die *geschlitzten Definitionsgebiete* von log bzw. Arctan sternförmig (bzgl. 1 bzw. 0) sind, sind log bzw. Arctan tatsächlich holomorph und Stammfunktionen von $z \mapsto 1/z$ bzw. $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$. Man beachte, dass diesmal $G \cap \mathbb{R}$ den vollen Definitionsbereich der reellen Funktionen ausmacht: $G_{\log} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+$, $G_{\text{Arctan}} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ und nach Definition von $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bzw. $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\log(x) = \ln(x) \ , \ \text{Arctan}(x) = \arctan(x)$$

für alle $x \in (0,\infty)$ bzw. $x \in \mathbb{R}$. Wir haben also ln bzw. arctan (maximal) *holomorph fortgesetzt*.

(2) Die maximalen Definitionsbereiche $G \subseteq \mathbb{C}$ von log bzw. Arctan könnte man freilich auch anders wählen, z.B. könnte man bei log wählen (additive Konstante, damit $\log(1) = 0$):

$$\log_1 : \mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}_0^+) \to \mathbb{R} \quad , \quad \log_1(z) = \int_{[-i,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\log_2 : \mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}_0^-) \to \mathbb{R} \quad , \quad \log_1(z) = \int_{[i,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\pi}{2} \ .$$

Natürlich können sich $\log, \log_1, \log_2$ auf den *Zusammenhangskomponenten* ihrer Durchschnitte nur um eine additive Konstante unterscheiden, denn sie haben alle die gleichen Ableitungen. Man spricht dann bei $\log, \log_1, \log_2$ (und anderen Wahlen) von *Nebenzweigen des Logarithmus* (und Ähnliches gilt für den Arcustangens). Beachte wegen

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right) \ ,$$

dass im Komplexen ein enger Zusammenhang zwischen Logarithmus und Arcustangens besteht, den man im Reellen nicht erkennen konnte:

$$\text{Arctan}(z) = \frac{1}{2i}\left(\log_1(z-i) + \log_2(z+i)\right) \ .$$

(3) Wir werden später für die *komplexe Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

sehen, dass gilt (siehe Kap.5 und **??**):

- $\exp \circ \log(z) = z$ (für jeden Zweig des Logarithmus, insbesondere dem Hauptzweig)
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

Zerlegen wir daher log in Real- und Imaginärteil,

$$\log(z) =: u(z) + iv(z) \ ,$$

so sehen wir aus der Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}^*$, mit $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} re^{i\varphi} = z &= \exp \circ \log(z) = \exp\big(u(z) + iv(z)\big) \\ &= \exp\big(u(z)\big) \cdot \exp\big(iv(z)\big) \\ &= e^{u(z)} e^{iv(z)} \end{aligned}$$

ist, also

$$|z| = r = e^{u(z)} \quad \Rightarrow \quad u(z) = \ln(|z|)$$

und wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ auch

$$e^{i\varphi} = e^{iv(z)} \quad \Rightarrow \quad v(z) = \varphi + 2\pi k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Der Realteil von log ist also festgelegt durch $\ln(|.|)$, während der Imaginärteil <u>in stetiger Weise</u> ein Argument von z auswählt. Für den Hauptzweig setzt man etwa

$$\arg : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R} \quad , \quad \arg := \Im\big(\log(z)\big)$$

und das ist gerade das Argument von z, welches im Intervall $(-\pi, \pi)$ liegt. ✎ *Übung* ✐

Eine andere Interpretationen dafür, dass es keinen holomorphen Logarithmus auf ganz $\mathbb{C}^*$ gibt, ist daher: Man kann das Argument von z für $z \in \mathbb{C}^*$ nicht in stetiger Weise wählen:

$$\lim_{z \longrightarrow -1\uparrow} \big(\arg(z)\big) = \pi \quad , \quad \lim_{z \longrightarrow -1\downarrow} \big(\arg(w)\big) = -\pi \ .$$

Kapitel 4

Cauchys Integralformel

05.05.2008

Motivation

Ist $B \subseteq \mathbb{C}$ eine Scheibe (oder ein sternförmiges Gebiet), so haben wir gesehen, dass jede holomorphe Funktion $f \in H(B)$ eine Stammfunktion $F \in H(B)$ besitzt, $F' = f$. Auf einem beliebigen Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist daher jede holomorphe Funktion wenigstens lokal integrabel (siehe Korollar 3.5.). Jetzt werden wir sehen, dass nur die holomorphen Funktionen lokal integrierbar sind, d.h.: Ist $F \in H(G)$, so ist $F' : G \to \mathbb{C}$ automatisch auch holomorph! Zur Vorbereitung dient das folgende Lemma.

4.1 Erste Folgerungen der Cauchy Integralformel

Lemma 4.1.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass $f\big|_{G\setminus\{a\}}$ holomorph ist. Dann gilt für jedes achsenparallele Rechteck $R \subseteq G$:

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0\ .$$

¡? Beweis ¿!

Ist $a \notin R$, so ist $R \subseteq G\setminus\{a\}$, also $\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$ nach Lemma 3.2.. Sei daher nun $a \in \overset{\circ}{R}$. Wir zerlegen dann R in 9 Teilrechtecke $R_0, \ldots, R_8$, wobei $a \in R_0$ sei und wir R_0 mit beliebig kleinem Umfang wählen können ($L[\partial R_0] < \varepsilon$, falls $\varepsilon > 0$ gegeben ist). Wegen Lemma 3.2. ist wieder $\int_{\partial R_i} f(z)\ dz = 0$ (für $j = 1, \ldots, 8$), also

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = \sum_{j=0}^{8} \int_{\partial R_j} f(z)\ dz = \int_{\partial R_0} f(z)\ dz\ .$$

Da f stetig ist und R kompakt, ist $f\big|_R$ beschränkt. Sei $c > 0$, so dass $|f(z)| \leq c$, für alle $z \in R$ ist. Ist nun $\partial R_0 = \text{Bild}\,(\gamma)$, so ist also:

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\ dz\right| = \left|\int_0^1 f\circ\gamma(t)\cdot\dot{\gamma}(t)\ dt\right| \leq \int_0^1 \underbrace{|f\circ\gamma(t)|}_{\leq c}\cdot|\dot{\gamma}(t)|\ dt \leq c\cdot \underbrace{\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\ dt}_{=L[\partial R_0]} < c\cdot\varepsilon\ ,$$

wenn man $\varepsilon > 0$ beliebig vorgibt (und R_0 dann entsprechend klein wählt). Also muss:

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$$

sein. Für $a \in \partial R$ argumentiere ähnlich.
QED$_\blacktriangle$

Korollar 4.2.
Ist $B \subseteq \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe, $a \in B$ und $f : B \to \mathbb{C}$ stetig, so dass $f|_{B\setminus\{a\}}$ holomorph ist, so gilt für jeden geschlossenen Weg γ in B:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0\ .$$

¡? Beweis ¿!

Nach Lemma 4.1. gilt das für Ränder achsenparalleler Rechtecke und nach Lemma 3.1. hat f deshalb eine Stammfunktion. Wegen 2.2.1(2) gilt deshalb die Aussage.
QED

Satz 4.3. Cauchys Integralformel
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $a \in G$ und $r > 0$ so klein, dass $\overline{B_r(a)} \subseteq G$ ist. Für alle $z \in B_r(a)$ gilt dann:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ dz\ .$$

4.1.1 Kommentar

(1) Unter $\partial B_r(a)$ sei der geschlossene Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to G$, $\gamma(t) = a + re^{it}$ verstanden.

(2) Cauchys Integralformel zeigt, dass die holomorphen Funktionen $f \in H(G)$ auf der Kreisscheibe $B_r(a)$ durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe $\partial B_r(a)$ bestimmt ist!

(3) Wir werden im Beweis folgende Aussage über *parameterabhängige Integrale* verwenden (✎ *Übung* ✐): Ist $I = [a, b]$, $J \subseteq \mathbb{R}$ (offenenes) Intervall und $f : I \times J \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig und stetig partiell differenzierbar in y, so ist auch $g : J \to \mathbb{R}$,

$$g(y) := \int_a^b f(x, y)\ dx\ ,$$

stetig differenzierbar und es gilt:

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ dx\ .$$

Lemma 4.4.
Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann gilt für alle $z \in B_r(a)$:

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i\ .$$

¡? Beweis ¿!

Wir definieren $h : B_r(a) \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\ .$$

Es ist dann mit Bild $(\gamma) = \partial B_r(a)$, $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$h(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\dot\gamma(t)\ dt}{\gamma(t) - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\ dt = 2\pi i\ .$$

Wegen 4.1.1(3) ist h auch differenzierbar und

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(z) = \int_{\partial B_r(a)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)}_{=0} \, d\zeta = 0 \ ,$$

also ist h holomorph und

$$h'(z) = \frac{\partial h}{\partial z}(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) \, d\zeta = \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta = 0 \ ,$$

weil nämlich $\zeta \longrightarrow \frac{1}{(\zeta - z)^2}$ (auf $\mathbb{C} \backslash \{z\}$) eine Stammfunktion hat (nämlich $\zeta \mapsto \frac{-1}{\zeta - z}$) und $\partial B_r(a)$ geschlossen ist. Damit ist h konstant, also $h(z) = 2\pi i \ , \ \forall z \in B_r(a)$.
QED$_\blacktriangle$

4.1.2 Kommentar

Ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ beliebiger Weg und $a \notin \mathrm{Bild}\,(\gamma)$, so wird

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a}$$

als *Umlaufzahl von γ um a* bezeichnet. ✎ *Übung* ✐

¡? Beweis ¿! von Satz 4.3.

Da $\overline{B_r(a)} \subseteq G$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $B := B_{r+\varepsilon}(a) \subseteq G$ ist. Zu $z \in B_r(a)$ definieren wir nun $g : B \to \mathbb{C}$ durch

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases} .$$

Es ist dann g stetig und $g\big|_{B \backslash \{z\}}$ holomorph. Nach Korollar 4.2. ist deshalb:

$$0 = \int_{\partial B_r(a)} g(\zeta) \, d\zeta = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z) \, d\zeta}{\zeta - z} \ .$$

Daraus folgt

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int_{\partial B_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot f(z) \ .$$

QED$_\blacktriangle$

Korollar 4.5.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist auch $f' : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

4.1.3 Kommentar

Die Ableitungen einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) braucht nicht einmal stetig sein (Beispiel: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$). Im holomorphen Fall ist sie nicht nur stetig, sondern sogar (wieder) holomorph. Sensation!

¡? Beweis ¿! von Korollar 4.5.

Sei $a \in G$ beliebig. Zu zeigen: f' ist in a komplex differenzierbar: Wähle $r > 0$ so klein, dass $\overline{B_r(a)} \subseteq G$ ist. Nach Satz 4.3. ist für alle $z \in B_r(a)$:

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} .$$

Die z-Differentiation darf man nun unter dem Integral durchführen (siehe 4.1.1(3)). Daher ist

$$2\pi i f'(z) = \int_{\partial B_r(a)} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} .$$

(Integralformel für die Ableitung). Wieder mit 4.1.1(3) folgt, dass $f' : G \subseteq \mathbb{C}$ differenzierbar ist und es ist

$$\frac{\partial f'}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} f(\zeta) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)^2}_{=0} d\zeta = 0 ,$$

also f' komplex differenzierbar in a.

QED$_\blacktriangle$

Korollar 4.6. verallgemeinerte Cauchysche Integralformel
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f unendlich-oft komplex differenzierbar. Ist $a \in G$ und $r > 0$, so dass $\overline{B_r(a)} \subseteq G$ ist, so gilt für alle $z \in B_r(a)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} .$$

¡? Beweis ¿!

Wiederholte Anwendung von Korollar 4.5. leifert, dass f beliebig oft komplex differenzierbar ist und die n-fache Ableitung von f in $z \in B_r(a)$ kann man in der Cauchyschen Integralformel unter dem Integral durchführen:

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) f(\zeta)\, d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} .$$

QED$_\blacktriangle$

Korollar 4.7. Satz von Morera
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jedes achsenparallele Rechteck $R \subseteq G$, dass $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ ist, so folgt: f ist holomorph.

¡? Beweis ¿!

Sei $a \in G$ beliebig und $B := B_r(a) \subseteq G$ eine Scheibe um a (mit $r > 0$ klein genug). Nach Lemma 3.1. ist $f\big|_B$ dann integrabel, also $f\big|_B = F'$ mit einem $F \in H(B)$. Nach Korollar 4.5. ist aber damit $f\big|_B$ auch holomorph, also f komplex differenzierbar in a.

QED$_\blacktriangle$

4.1.4 Kommentar

(1) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, so sind folgende Aussagen für eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ äquivalent (vgl. Motivation des Kapitels):

  (i) f ist holomorph;

(ii) $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$, für alle achsenparallelen Rechtecke $R \subseteq G$;
(iii) f ist lokal integrierbar.

Denn (i) $\Rightarrow$ (ii) ist Lemma 3.2., (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist Lemma 3.1. und (iii) $\Rightarrow$ (i) ist Korollar 4.5..

(2) Die „Verschärfung“ Lemma 4.1. von Lemma 3.2. erweist sich nun im Nachhinein als gar nicht „schärfer“, denn ein stetiges $f : G \to \mathbb{C}$, welches (für ein $a \in G$) auf $G\backslash\{a\}$ holomorph ist, ist automatisch auf ganz G holomorph. (Trotzdem war Lemma 4.1. wichtig, um nämlich erst einmal Satz 4.3. zu bekommen.) Beachte auch, dass man im Beweis von Lemma 4.1. lediglich die lokale Beschränktheit von f (um a) braucht (vgl. **??** und **??**).

Korollar 4.8. Cauchy-Abschätzungen
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(a)} \subseteq G$ ist. Ist nun $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $M := \sup\left\{|f(z)| \,\middle|\, z \in \partial B_r(a)\right\}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{r^n} \ .$$

¡? Beweis ¿!

Man beachte, dass $\partial B_r(a)$ kompakt (und f stetig) ist, also $M < \infty$ (nach Weierstraß). Aus Korollar 4.6. folgt nun mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \partial B_r(a)$, $\gamma(t) = a + re^{it}$:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) ire^{it}}{(re^{it})^{n+1}}\, dt \ ,$$

also

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left|f(a + re^{it})\right|}_{\leq M} \cdot \frac{\overbrace{\left|e^{-int}\right|}^{=1}}{r^n}\, dt \leq \frac{n!M}{r^n} \ .$$

QED$_\blacktriangle$

Korollar 4.9. Satz von Liouville
Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f bereits konstant.

¡? Beweis ¿!

Sei $M > 0$ so, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ist nun $a \in \mathbb{C}$ bliebig, so folgt für jedes $r > 0$ (weil $B_r(a) \subseteq \mathbb{C}\,,\ \forall r > 0$) aus Korollar 4.8.:

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r} \ .$$

Also ist$f'(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$, Also $f = const.$
QED$_\blacktriangle$

Korollar 4.10. Fundamentalsatz der Algebra
Sei $p \in \mathbb{C}[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann hat p eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

¡? Beweis ¿!

Sei $n = \deg(p) \geq 1$, also (für die zugehörige Polynomfunktion)

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \ ,$$

mit $a_j \in \mathbb{C}$ $(j = 0, \ldots, n)$ und $a_n \neq 0$. Ist nun $R \geq 1$ und $c = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\}$, so ist für $|z| \geq R$:

$$\left|a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0\right| \leq nc\, |z|^{n-1} \ ,$$

also

$$|p(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - nc\,|z|^{n-1} = (|a_n|\,R - nc)\,|z|^{n-1}\ .$$

Wählt man nun $R \geq \frac{1+nc}{|a_n|}$, also $|a_n|\,R - nc \geq 1$, so folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$:

$$|p(z)| \geq |z|^{n-1} \geq R^{n-1} \geq 1\ .$$

Da $K = \overline{B_R(0)}$ kompakt ist und $|p|$ stetig ist, nimmt $|p|\,\big|_K$ sein Infimum an (Weierstraß).

Annahme: Sei p ohne Nullstelle.

Dann folgt

$$m := \inf\left\{|p(z)|\,\middle|\,z \in K\right\} > 0\ .$$

Setzt man nun $M := \max\left\{\frac{1}{m}, 1\right\}$, so folgt für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}\ :$$

$|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 4.3. ist also $f = const$, also auch $p = const$. ↯ `Widerspruch` ↯
Also hat p doch (mindestens) eine Nullstelle.
QED

4.1.5 Kommentar

(1) Wegen der Division mit Rest, kann ein Polynom $p \in K[X]$ (K ein Körper) vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens n Nullstellen haben, falls $p \neq 0$ ist. Denn ist $a \in K$ eine Nullstelle, so gibt es ein $q \in K[X]$ vom Grad $n-1$ mit

$$p(x) = (x-a)q(x)\ .$$

Hat K (wie $\mathbb{C}$) unendlich viele Elemente, so kann man deshalb $p \in K[X]$ mit seiner Polynomfunktion $\tilde{p} : K \to K$, $\tilde{p}(x) = p(x)$ identifizieren (weil $\tilde{p} = \tilde{q} \Rightarrow (p-q)\tilde{} = 0 \Rightarrow p-q = 0 \Rightarrow p = q$). Im Beweis von Korollar 4.10. haben wir genau genommen nur gezeigt: Falls $p \in \mathbb{C}[X]$, $p \neq 0$ keine Nullstelle besitzt, dann ist $\tilde{p} = const$. Aber nun folgt auch $p = const$ (weil $\widetilde{const} = const$).

(2) Wiederholte Anwendung (zusammen mit Division mit Rest) liefert sogar, dass jedes Polynom in Linearfaktoren *zerfällt*: Ist $p \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n, so existierten $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$:

$$p(x) = \lambda(x-a_1)\cdots(x-a_n)\ .$$

($\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, vgl. **??** **??**.)

4.2 Kompakte Konvergenz

4.2.1 Erinnere

(1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. Wir haben gesagt (siehe MfPh1 Satz 0.0.), dass die Funktionenfolge (f_n) geichmäßig gegen f konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ und $x \in I$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Wir haben dann gesehen (vgl. MfPh1 Satz 0.0.): Ist $I = [a,b]$, $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $(f_n) \longrightarrow f$ gleichmäßig, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)\ dx\ .$$

(2) Ist nun $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n, f : G \to \mathbb{C}$ Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und $A \subseteq G$, so sagen wir, dass (f_n) auf A gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $z \in A$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Definition 4.11.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n, f : G \to \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$). Wir sagen, dass (f_n) *kompakt gegen f konvergiert*, wenn (f_n) auf allen kompakten Teilmengen $K \subseteq G$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

4.2.2 Kommentar

(1) Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, so hatten wir die Supremumsnorm von f definiert durch

$$\|f\|_\infty := \sup \left\{ |f(z)| \,\middle|\, z \in K \right\} \quad (< \infty \text{ nach Weierstraß}) \ .$$

(Erinnere, dass $(\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum ist.) Für $f_n, f : K \to \mathbb{C}$ stetig konvergiert dann (nach Definition) (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $(\|f_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ geht (also $(f_n) \longrightarrow f$ in $(\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty)$).

(2) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so schreiben wir für jedes Kompaktum $K \subseteq G$:

$$\|f\|_K := \left\| f\big|_K \right\|_\infty = \sup \left\{ |f(z)| \,\middle|\, z \in K \right\} \ .$$

Satz 4.12. Weierstraß
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n \in H(G)$ ($n \in \mathbb{N}$) und $f : G \to \mathbb{C}$. Konvergiert nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen f, so gilt:

(a) f ist holomorph,

(b) (f_n') konvergiert kompakt gegen f'.

4.2.3 Kommentar

Satz 4.12. gibt uns nicht nur die Möglichkeit neue holomorphe Funktionen zu konstruieren (als kompakte Limiten bekannter), sondern auch noch ihre Ableitungen zu berechnen, denn schon wegen der punktweisen Konvergenz von $(f_n') \longrightarrow f'$ folgt (hier $\frac{d}{dz} = \,'$):

$$\frac{d}{dz}\big(\lim(f_n)\big) = \lim \left(\frac{df_n}{dz} \right) \ .$$

¡? Beweis ¿! von Satz 4.12.

(a) Da $(f_n\big|_K) \longrightarrow f\big|_K$ gleichmäßig konvergiert, ist $f\big|_K$ stetig, für alle Kompakta, also f stetig. (Jedes a hat eine kompakte Umgebung.) Ist nun $R \subseteq G$ ein achsenparalleles Rechteck, so ist ∂R kompakt (weil $\partial R = \text{Bild}\,(\gamma)$ für ein stetiges $\gamma : I \to G$ mit einem kompakten Intervall $I = [a, b]$). Deshalb ist mit 4.2.1(1):

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = \lim_{n\longrightarrow\infty} \underbrace{\int_{\partial R} f_n(z)\ dz}_{=0\,,\text{weil } f_n\in H(G)} = 0 \ ,$$

also nach Korollar 4.7. (Morera) auch f holomorph.

(b) Sei nun $K \subseteq G$ kompakt. Weil für jedes $z \in G$

$$\text{dist}\,(z, \partial G) := \inf \left\{ |z - \zeta| \,\middle|\, \zeta \in \partial g \right\} > 0$$

ist (G ist offen!) und $\text{dist}\,(-, \partial G) : G \to \mathbb{R}^+$ stetig ist, ist ✎ *Übung* ✐

$$d := \operatorname{dist}(K, \partial G) := \inf\left\{\operatorname{dist}(z, \partial K) \middle| z \in K\right\} > 0$$

(da K kompakt ist). Setze $r := \frac{d}{2}$ und

$$K_r := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{dist}(z, K) \leq r\right\} \ .$$

Dann ist auch K_r kompakt (weil beschränkt und abgeschlossen) und $K_r \subseteq G$. Für jedes $z \in K$ ist nun $\overline{B_r(z)} \subseteq K_r \subseteq G$, also nach Korollar 4.6.

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \ .$$

Setze nun

$$c_n := \|f_n - f\|_{K_r} = \sup_{z \in K_r} |f_n(z) - f(z)| \ .$$

Da (f_n) kompakt gegen f konvergiert, folgt $(c_n) \longrightarrow 0$. Damit gilt

$$\|f_n' - f'\|_K = \sup_{z \in K} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r(z)} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{r^2} \, d\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{c_n}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{c_n}{r} \ \underset{\infty}{\overset{n}{\longrightarrow}} \ 0 \ .$$

QED$_\blacktriangle$

Kapitel 5

Potenzreihen

25.05.2008

5.1 Komplex-analytische Funktionen

Definition 5.1.

(a) *Eine (formale) Potenzreihe* ist ein Ausdruck der Form

$$P := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \ ,$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ (und $n \in \mathbb{N}_0$). Wir notieren $\mathbb{C}[\![X]\!] := \{\text{komplexe Potenzreihen}\}$.

(b) Es heißt $P \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ konvergent in $z \in \mathbb{C}$, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergent ist (d.h. $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert).

5.1.1 Kommentar

(1) Eine Potenzreihe P braucht in keinem Punkt $z \neq 0$ konvergent zu sein. Z.B. ist $P = \sum_{n=0}^{\infty} n! X^n$ in keinem Punkt $z \neq 0$ konvergent, weil $(n! z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. ✎ *Übung* ✎

(2) Man kann Potenzreihen (formal) addieren, multiplizieren und mit Skalaren (aus $\mathbb{C}$) multiplizieren:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n &:= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n \\ \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n &:= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) X^n \end{aligned}$$

$((\mathbb{C}[\![X]\!], +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum);

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) \star \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} (a_k \cdot b_l)\right) X^n$$

$((\mathbb{C}[\![X]\!], +, \star)$ ist ein Ring); $((\mathbb{C}[\![X]\!], +, \cdot, \star)$ ist ein $\mathbb{C}$ -Algebra).

5.1.2 Beispiel

Die *geometrische Reihe* ist gegeben durch

$$P := \sum_{n=0}^{\infty} X^n \ .$$

Sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ (sogar für $|z| \geq 1$):

$$X^{n+1} - 1 = (1 + X + \cdots + X^n)\,(X - 1)$$

also

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}}{z-1} + \frac{1}{1-z} \ , \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \ .$$

Für $|z| < 1$ ist $\left(\frac{z^{n+1}}{z-1}\right)_n \longrightarrow 0$, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ , \ \forall z \in B_1(0) =: B_1 \ ;$$

für $|z| \geq 1$ ist (z^n) keine Nullfolge.

Satz 5.2.
Sei $P \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ eine Potenzreihe. Dann existiert geneu ein $R \in [0, \infty]$, so dass gilt:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mir $|z| < R$ ist $\sum a_n z^n$ absolut konvergent.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ ist $\sum a_n z^n$ divergent.

5.1.3 Kommentar

(1) Eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ konvergiert. Es konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ und auch jede Umordnung davon ($\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} w_{\tau(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ ✎ *Übung* ✎).

(2) $R = R_P$ aus 4.1.1 heißt *Konvergenzradius* von P,

(3) Konvergiert also ein $P \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ in einem $z_0 \in \mathbb{C}^*$, so konvergiert sie automatisch auf $B_{|z_0|}(0)$!

(4) Für eine beliebige Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen setzt man

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(\lambda_n) := \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\sup\left\{\lambda_k \middle| k \geq n\right\}\right)$$

den *Limes superior* von (λ_n). Weil die Folge (a_n) mit

$$a_n := \sup\left\{\lambda_k \middle| k \geq n\right\} \in (-\infty, \infty]$$

offenbar monoton fallend ist, existiert der Limes superior uneigentlich stets,

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(\lambda_n) \in [-\infty, +\infty] \ .$$

Er beschreibt den größten Häufungspunkt der Folge (λ_n), insbesondere gilt, wenn $\lambda := \limsup_{n\longrightarrow\infty}(\lambda_n) \in \mathbb{R}$ ist:

$$\begin{array}{lcl} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : & & \lambda_n \leq \lambda + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \ \exists \infty\text{-viele } n \in \mathbb{N} \quad : & & \lambda_n > \lambda - \varepsilon \end{array} \ .$$

¡? Beweis ¿! von Satz 5.2.

Man setze

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty] \quad \text{(Hadamard)}$$

(wobei hier $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$ sei).

(a) Ist $R = \infty$, so ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \longrightarrow 0$. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < 1/2$. Es folgt

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|\right)^n < \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty\ .$$

Ist $0 < R < \infty$, $\varepsilon > 0$ dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|z|$ $\forall z \in B_R$. Setze nun

$$q := \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|z| = \underbrace{\frac{|z|}{R}}_{<1} + \varepsilon \cdot |z| < 1$$

(für $\varepsilon > 0$ klein genug). Dann folgt

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|\right)^n < \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n < \infty\ .$$

(b) Ist $R = 0$ und $z \neq 0$ dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > 1$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n z^n)$ keine Nullfolge, also $\sum a_n z^n$ divergent.

Ist $0 < R < \infty$ und $|z| > R$, so ist

$$\left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z| = \underbrace{\frac{|z|}{R}}_{>1} - \varepsilon \cdot |z| > 1\ ,$$

für $\varepsilon > 0$ klein genug. Für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$ ist aber $\sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z|$, also $(a_n z^n)$ keine Nullfolge, also $\sum a_n z^n$ divergent.

QED$_\blacktriangle$

5.1.4 Kommentar

Wir nennen eine formale Potenzreihe $P \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ konvergent, wenn $R_P > 0$ ist und notieren

$$\mathbb{C}\langle X\rangle := \left\{P \in \mathbb{C}[\![X]\!] \middle| P \text{ ist konvergent}\right\}\ .$$

Auch $\mathbb{C}\langle X\rangle$ ist eine $\mathbb{C}$-(Unter-)Algebra (✎ *Übung* ✐). Man hat also

$$\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}\langle X\rangle \subseteq \mathbb{C}[\![X]\!]\ .$$

Satz 5.3.
Sei $P \in \mathbb{C}\langle X\rangle$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = R_P$ und $f = f_P : B_R \to \mathbb{C}$ die zugehörige Funktion, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = P(z)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P_n \in \mathbb{C}[X]$ die Partialsumme $P_n := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ und $f_n : B_R(0) \to \mathbb{C}$ die (Einschränkung der) zugehörige(n) Polynomialfunktion, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = P_n(z)$. Dann gilt: Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert kompakt gegen f.

¡? Beweis ¿!

Sei $K \subseteq B_R(0)$ kompakt. Dann existiert ein r mit $0 < r < R$, so dass $K \subseteq B_r(0)$. Sei nun $\varepsilon_1 > 0$ so klein, dass

$$q := \frac{r}{R} + \varepsilon_1 r < 1$$

ist. Es existiert nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R} + \varepsilon_1 \ .$$

Damit gilt für alle $k \geq n_0$ und alle $z \in K$:

$$\left|a_k z^k\right| = \left(\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z|\right)^k \leq \left(\left(\frac{1}{k} + \varepsilon_1\right)\right)^k = q^k \ .$$

Sein nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_1 \geq n_0$ mit $\sum_{k=n_1}^{\infty} a^k < \varepsilon$. Für alle $z \in K$ und alle $n \geq n_1$ gilt daher:

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k < \varepsilon \ .$$

Also konvergiert $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

QED$_\blacktriangle$

5.1.5 Kommentar

(1) Nach Satz 4.12. (Weierstraß) ist deshalb $f : B_R \to \mathbb{C}$ holomorph und für ihre Ableitung gilt:

$$f'(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n'(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n \ .$$

Man darf also Potenzreihen gliedweise differenzieren!

(2) Zwei verschiedene Potenzreihen $P, \tilde{P} \in \mathbb{C}\langle X\rangle$ induzieren auch zwei verschiedene holomorphe Funktionen: Ist etwa $R \leq \tilde{R}$ und ist $f_P = f_{\tilde{P}}\big|_{B_R}$, so ist also $f_{\tilde{P}-P} = f_{\tilde{P}} - f_P = 0$ auf B_R. Es reicht deshalb zu zeigen: Ist $f_P = 0$, so ist $P = 0$.
Ist aber $f_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$ in B_R (für $R > 0$), so gilt wegen Satz 4.12. und Satz 5.3.:

$$f^{(n)}(0) = n! a_n \ ,$$

also $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das ist $P = \sum a_n X^n = 0$. Die zu f gehörende Potenzreihe P ist also eindeutig bestimmt, weshalb wir im Folgenden oft P mit f identifizieren.

(3) Aber auch für formale Potenzreihen können wir definieren:

$$\frac{d}{dX} =' : \mathbb{C}[\![X]\!] \to \mathbb{C}[\![X]\!] \ , \ P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mapsto P'$$

mit

$$P' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot X^n \ .$$

Wegen $f_P' = f_{P'}$ (Satz 4.12. & Satz 5.3.) folgt deshalb, dass $R' := R_{P'} \geq R := R_P$ ist. Aber es gilt sogar:

Korollar 5.4.
Für alle $P \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ gilt: $R_P = R_{P'}$.

¡? Beweis ¿!

Wir wissen bereits: $R' \geq R$. **O.B.d.A.** sei nun $R' > 0$, zu zeigen $R' \leq R$. Betrachte $\gamma : [0,1] \to B_{R'}$, $\gamma(t) = tz$, für ein $z \in B_{R'}$. Weil $\mathcal{C} = \mathrm{Bild}\,(\gamma) \subseteq B_{R'}$ kompakt ist, folgt nach Satz 5.2.

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k z^k\right) \longrightarrow f' = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_k z^k \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{C} \ .$$

Setze nun $F : B_{R'} \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int_\gamma f'(z)\ dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(tz)^n \cdot z\ dt \ .$$

Dann gilt

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^{n+1}\underbrace{\int_0^1 t^n\ dt}_{=\frac{1}{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \ .$$

Also ist $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ konvergent in z und damit $R \geq R'$.
QED$_\blacktriangle$

Definition 5.5.

(a) Die *komplexe Exponentialfunktion* ist definiert durch $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

(b) Die *komplexe Sinus- und Cosinusfunktion* sind definiert durch $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} \quad , \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} \ .$$

(c) Der *komplexe Hauptzweig des Logarithmus* wird (noch mal) definiert durch $\log : B_1(1) \to \mathbb{C}$,

$$\log(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \ .$$

(d) Der *komplexe Hauptzweig des Arcustangens* wird (noch mal) definiert durch $\mathrm{Arctan} : B_1(1) \to \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Arctan}(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \ .$$

5.1.6 Kommentar

Tatsächlich holt man etwa aus der reellen Theorie (siehe MfPh1 Satz 0.0.) oder der Formel von Hadamard (Beweis zu Satz 5.2.), dass die Konvergenzradien der entsprechenden Potenzreihen $R = \infty$ (bei exp, sin und cos), $R = 1$ (bei log und Arctan) ist.

Satz 5.6.
Auch für die komplexen Versionen von exp, sin, cos, log und Arctan gilt (auf ihrem ganzen Definitionsbereich):

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= z \\ \sin'(z) &= \cos(z) \\ \cos'(z) &= -\sin(z) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log'(z) &= \frac{1}{z} \\ \operatorname{Arctan}'(z) &= \frac{1}{1+z^2} \end{aligned}$$

¡? Beweis ¿!

Gliedweises Differenzieren liefert die Behauptung.
QED

5.1.7 Kommentar

(1) Die Definitionen von log und Arctan stimmen daher tatsächlich mit den früheren aus 3.2.1 überein, denn jeweils beide haben die gleichen Ableitungen und stimmen in $z_0 = 1$ bzw. $z_0 = 0$ überein,

$$\log(1) = 0 \quad , \quad \operatorname{Arctan}(0) = 0 \ .$$

Man beachte allerdings, dass wir hier log und Arctan nur auf den Scheiben $B_1(1)$ bzw. $B_1(0)$ definieren können, während wir sie früher (siehe 3.3) auf den größeren Schlitzgebieten definieren konnten.

(2) Man beachte, dass wir nun einen Grund dafür gefunden haben, warum die Taylor-Reihe im Nullpunkt $T_{f,0}$ der reell-analytischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$, nur den Konvergenzradius $R = 1$ hat! Die holomorphe Fortsetzung $\hat{f} : B_R(0) \to \mathbb{C}$, $\hat{f} = T_{f,0}(z)$ wäre ja sonst auf $B_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ und damit auch die Ableitung $f' : B_R(0) \to \mathbb{C}$ definiert, $f'(z) = T'_{f,0}(z)$. Es hat aber

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Pole bei $\pm i$, weshalb also R höchstens 1 sein kann. Der Grund für $R = 1$ liegt also im Komplexen.

Definition 5.7.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *komplex-analytisch*, wenn es für jedes $p \in G$ ein $r > 0$ gibt und ein $P = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\langle X \rangle$ mit Radius $R \geq r$, so dass für alle $z \in B_r(p)$ gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad (= P(z-p)) \ .$$

5.1.8 Kommentar

(1) Eine komplex-analytische Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist holomorph: Ist nämlich $p \in G$ beliebig, so wähle ein $r > 0$ und ein $P \in \mathbb{C}\langle X \rangle$, so dass $f(z) = P(z)$ ist, für $z \in B_r(p)$. Nach 5.1.5(1) ist dann $f\big|_{B_r(p)}$ holomorph, also komplex differenzierbar in p.

(2) Wegen 5.1.5(1) darf man nun $f_{B_r(p)}$ auch gliedweise differenzieren und erhält für $P = \sum a_n X^n$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \ .$$

(3) Die Potenzreihe $P \in \mathbb{C}\langle X\rangle$, die f lokal um p beschreibt, ist also durch f eindeutig bestimmt (vgl. 5.1.5(2)). Es ist die *Taylor-Reihe von f in p*

$$T_{f,p} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} X^n \ .$$

(4) Wegen Korollar 4.6. weiß man auch, dass für jedes $r > 0$, so dass $\overline{B_r(p)} \subseteq G$ ist, gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(p)} \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{(\zeta - p)^{n+1}} \ .$$

Lemma 5.8.
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ komplex-analytisch, $p \in D$ und f auf keiner Umgebung von p konstant. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in k(f,p) \in \mathbb{N}$, so dass gilt: Es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $g(p) \neq 0$ und

$$f(z) = f(p) + (z-p)^k g(z) \ ,$$

für alle $z \in G$.

5.1.9 Kommentar

Es heißt dann, wenn $f(p) = q$ ist, $k =: \mathrm{ord}_p(f)$ die *Vielfachheit der q-Stelle von f in p* oder die *q-Stellenordnung von f in p*.
¡? Beweis ¿!

Eindeutigkeit: Ist $f(z) = f(p) + (z-p)^k g(z)$ für alle $z \in G$ mit $g(p) \neq 0$, so ist nach der Produktregel für holomorphe Funktionen

$$f^{(l)}(p) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \underbrace{\frac{d^j}{dz^j}(z-p)^k\Big|_{z=p}}_{=0} \cdot \frac{d^{l-j}g}{dz^{l-j}}(p) = 0$$

für $1 \leq l < k$, während $f^{(k)}(p) = k!g(p) \neq 0$ ist. Es muss also

$$k = \min\left\{ j \in \mathbb{N} \middle| f^{(j)}(p) \neq 0 \right\} \tag{5.1}$$

sein.

Existenz: Sei $r > 0$ so klein, dass

$$f(z) = f(p) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-p)^n \ ,$$

für alle $z \in B_r(p)$ ist. Weil f nicht lokal um p konstant ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$. Setze daher wie in Gleichung (5.1):

$$k = \min\left\{ j \in \mathbb{N} \middle| a_j \neq 0 \right\} \ .$$

Dann ist also $a_k \neq 0$ und

$$f(z) = f(p) + (z-p)^k \big(a_k + a_{k+1}(z-p) + \dots \big) \ .$$

Setze nun $g : G \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(p)}{(z-p)^k} & \text{für } z \neq p \\ a_k & \text{für } z = p \end{cases} \ .$$

Dann ist g holomorph auf $G\backslash\{p\}$, es ist $g(z) = a_k \neq 0$ und auf $B_r(p)$ ist

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z-p)^n \ ,$$

also auch komplex differenzierbar in p.

QED$_\blacktriangle$

5.2 Holomorphe Fortsetzung

5.2.1 Vorbereitung

(1) Erinnere: Sei X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Eine Teilmenge $V \subseteq Y$ ist dann offen relativ Y, wenn es ein offenes $U \subseteq X$ gibt mit $U \cap Y = V$.

(2) Eine metrischer Raum X heißt wegzusammenhängend (vgl. MfPh3Diff Definition 3.10.), wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt (d.h. eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$).

(3) Man sagt nun, dass ein metrischer Raum X *zusammenhängend* ist, wenn gilt: Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ sein.

(4) Das Einheitsintervall $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend: Ist nämlich $I = U \dot{\cup} V$ wie oben, so setze $b := \sup(U)$. Da V offen ist, folgt aus $U \cap V = \emptyset$: $b \in U$. Da U offen ist, folgt $b = 1$. Ebenso erhält man $1 \in V$, wenn $U \neq \emptyset \neq V$ ist. ϟ Widerspruch ϟ

(5) Jeder wegzusammenhämgende Raum X ist zusammenhängend, denn: Seien $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \dot{\cup} V$. ISt nun $U \neq \emptyset \neq V$, so wähle $x \in U$, $y \in V$ und ein $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann ist $I = \gamma^{-1}(U) \dot{\cup} \gamma^{-1}(V)$, $0 \in \gamma^{-1}(U)$ und $1 \in \gamma^{-1}(V)$ ein ϟ Widerspruch ϟ

(6) Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ kann man auch die Umkehrung von (5) zeigen: ✎ *Übung* ✎

$$\text{zusammenhängend} \ \Leftrightarrow \ \text{wegzusammenhängend.}$$

Satz 5.9. Identitätssatz
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_j \in G$ ($j \in \mathbb{N}$) und $p \in G$. Weiter sei $z_j \neq p$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $(z_j) \longrightarrow p$. Dann gilt: Sind $f, g : G \to \mathbb{C}$ komplex analytisch mit $f(z_j) = g(z_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so gilt bereits $f = g$.

¡? Beweis ¿!

Setze $h := g - f : G \to \mathbb{C}$. Es folgt: $h(z_j) = 0$,$\forall j$. Zu zeigen ist $h = 0$. Setze dazu:

$$A := \left\{ q \in G \middle| T_{h,q} = 0 \right\} \ .$$

Behauptung: A ist abgeschlossen, offen und nicht-leer.

Da G zusammenhängend ist, folgt dann: $A = G$ (sonst wäre $G = A \dot{\cup} (G\backslash A)$ nicht-triviale Zerlegung). Insbesondere ist dann $h(q) = T_{h,q}(q) = 0$ für alle $q \in G$, also $h = 0$.

(i) A ist abgeschlossen, denn $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $h^{(n)} : G \to \mathbb{C}$ stetig, also $\left(h^{(n)}\right)^{-1}(0) \subseteq G$ abgeschlossen und damit auch

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(h^{(n)}\right)^{-1}(0)$$

abgeschlossen.

(ii) A ist auch offen, denn ist $q \in A$, so wähle $r > 0$, so dass $f(z) = T_{q,h}(z-q)$ ist, für alle $z \in B_r(q)$. Es folgt: $f(z) = 0$ für alle $z \in B_r(q)$, d.h. $T_{h,z} = 0$, also $z \in A$ für alle $z \in B_r(q)$.

(iii) Sei $p \in A$ und $T_{h,p} = \sum aq_n X^n$. Dann ist zunächst

$$a_0 = h(p) = \lim_{j \longrightarrow \infty} h(z_j) = 0 \ .$$

<u>Annahme:</u> $h\big|_{B_r(p)} \neq 0$ (für ein $r > 0$). Sei dann $k := \mathrm{ord}_h(p)$ (siehe Lemma 5.8.). Dann existiert $g \in H(G)$ mit $g(p) \neq 0$ und

$$h(z) = (z-p)^k g(z) \quad \forall z \in G \ .$$

Es folgt

$$g(z_j) = \frac{h(z_j)}{(z-p)^k} = 0 \ , \quad \forall j \in \mathbb{N} \ ,$$

also

$$g(p) = \lim_{j \longrightarrow \infty} g(z_j) = 0 \ \text{Widerspruch} \ ↯$$

✎ *Übung* ✐

Also doch $h_{B_r(p)} = 0$, damit $T_{h,p} = 0$ und $p \in A$.

QED$_\blacktriangle$

5.2.2 Kommentar

(1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Für eine ∞-oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und einem $p \in I$ braucht die Taylor-Reihe $T_{f,p} \in \mathbb{R}[\![X]\!]$ im Allgemeinen nicht konvergent sein und selbst wenn sie es ist, ist im Allgemeinen $T_{f,p}(x) \neq f(x)$ für $x \neq p$ (vgl. MfPh1 Satz 0.0., z.B. $x \mapsto e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$, $0 \mapsto 0$). (Wenn doch, so heißt f reell-analytisch.)

(2) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so wissen wir bereits, dass f ∞-oft komplex-differenzierbar ist. Der folgende Satz zeigt nun, dass solche „Anormalien“ wie im Reellen im holomorphen Fall nicht auftreten.

Satz 5.10.
Sei $G \subseteq C$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f komplex-analytisch. Genauer gilt: Ist $p \in G$ und $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(p)} \subseteq G$ ist, so gilt mit

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(p)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - p)^{n+1}} \ ,$$

dass für alle $z \in B_r(p)$ gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \ .$$

<u>¡? Beweis ¿!</u>

Sei also $p \in G$ und $r > 0$ mit $B := \overline{B_r(p)} \subseteq G$. Nach Satz 4.3. ist dann für alle $z \in B_r(p)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \ .$$

Aber:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-p}{\zeta-p}} \ ,$$

und weil $|z-p| < |\zeta - p| = r$ ist, für alle $z \in B_r(p)$, $\zeta \in \partial B_r(p)$ gilt mit 5.1.2:

$$\frac{1}{\zeta - p} = \frac{1}{\zeta - p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{\zeta-p}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta-p)^{n+1}} \cdot (z-p)^n \ .$$

Für jedes feste z ist die Konvergenz von

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{n+1}} \cdot (\zeta - p)^n$$

gleichmäßig in $\zeta \in \partial B$ (✎ *Übung* ✐, ∂B_r ist kompakt), also ist:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial b} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - p)^{n+1}} \right\} (z - p)^n \ ,$$

für alle $z \in B$.

QED$_\blacktriangle$

5.2.3 Kommentar

(1) Eine Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ ist also genau dan holomorph, wenn sie analytisch ist. Neben den Potenzreihen gibt es also lokal keine weiteren Beispiele holomorpher Funktionen.

(2) Der Identitätssatz (Satz 5.9.) gilt also für holomorphe Funktionen. Das zeigt beispielsweise:

(i) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar und $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $G \cap \mathbb{R} = I$, so gibt es höchstens eine holomorphe Fortsetzung $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$, d.h. $\hat{f}\big|_I = f$. Sind nämlich $\hat{f}_1, \hat{f}_2 : G \to \mathbb{C}$ zwei Fortsetzungen, so wähle $p \in I$ und $z_j \in I \backslash \{p\}$ mit $(z_j) \longrightarrow p$. Wegen $\hat{f}(z_j) = f(z_j) = \hat{f}_2(z_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ist dann schon $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$.

(ii) Die Funktionalgleichung für die reelle Exponentialfunktion gilt nun sogar für die komplexe:

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \tag{5.2}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$! Fixiere nämlich zunächst $w =: y \in \mathbb{R}$. Die linke und die rechte Seite von Gleichung (5.2) sind holomorph in z und stimmen für $z \in \mathbb{R}$ überein, also für alle $z \in \mathbb{C}$. Fixiere nun $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist Gleichung (5.2) wieder holomorph in w auf beiden Seiten und stimmen für $w \in \mathbb{R}$ – wie gesehen – überein: Also für alle $w \in \mathbb{C}$!

(iii) Ähnlich sieht man, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z) \\ \cos(z + w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(w)\sin(z) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= \cos(z) + i\sin(z) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \sin(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \ , \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. ✎ *Übung* ✐

(3) Es ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann auf ein geeignetes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar, wenn f reell-analytisch ist ✎ *Übung* ✐. Eine schwierige Aufgabe ist es, möglichst große Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$ zu finden, auf denen eine holomorphe Fortsetzung existiert.

(4) Der Konvergenzradius der Taylor-Reihe in einem Punkt $p \in I$ einer reell-analytischen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau so groß wie es eine (gewisse) maximale holomorphe Fortsetzung $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$ zulässt: Es gibt keine weiteren Hindernisse.

5.2.4 Beispiel

Für die komplexe Exponentialfunktion exp gilt $\exp(z) \neq 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$, denn

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1 \ .$$

Andererseits ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ surjektiv, denn ist $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ beliebig, so hat w wegen

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \big(\cos(y) + i \sin(y)\big) \tag{5.3}$$

mit $x := \ln(r)$ und $y := \varphi$ ein Urbild. Beachte aber, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ <u>nicht</u> injektiv ist, sondern wegen Gleichung (5.3) gilt:

$$e^z = e^w \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : w = z + 2\pi i k \ . \tag{5.4}$$

Es kann auch deshalb keinen glabalen Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$ geben.

Definition 5.11.

(a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Man nennt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ einen *Zweig des Logarithmus*, wenn für alle $z \in G$ gilt:

$$\exp\big(f(z)\big) = z \ .$$

(b) Man nennt $f : G \to \mathbb{C}$ $(G \subseteq \mathbb{C})$ einen *Zweig der Quadratwurzel*, wenn für alle $z \in G$ gilt

$$f(z)^2 = z \ .$$

5.2.5 Kommentar

(1) Der Hauptzweig $\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$,

$$\log(z) = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

(vgl. **??**) ist ein Zweig des Logarithmus, denn für $z = re^{i\varphi}$ bei $\varphi = (-\pi, \pi)$ gilt:

$$\log(z) = \ln(r) + i\varphi \ .$$

✎ *Übung* ✎

Daher ist:

$$\exp \circ \log(z) = \exp\big(\ln(z) + i\varphi\big) = \exp\big(\ln(z)\big) \cdot \exp(i\varphi) = re^{i\varphi} = z \ , \ \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^- \ .$$

(2) Ist $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ ein weiterer Zweig, so existiert für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ ein $k(z) \in \mathbb{Z}$ mit

$$f(z) = \log(z) + 2\pi i k(z) \ ,$$

denn $\exp\big(f(z)\big) = z = \exp\big(\log(z)\big)$ (vgl.Gleichung (5.4)). Weil aber $k : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^- \to \mathbb{Z}$ stetig ist $(k(z) = \frac{1}{2\pi i}(f - \log)(z))$ und $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ zusammenhängend, folgt $k = \mathit{const.}$) Für $k \neq 0$ heißt $f = \log + 2\pi i k$ Nebenzweig des Logarithmus. (Auf anderen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ gibt es andere Zweige, vgl. **??**, **??**).

(3) Auf $G = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ definiert man den Hauptzweig $\mathrm{sqrt} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ durch

$$\sqrt{z} := \mathrm{sqrt}(z) := \exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right) \ .$$

Tatsächlich ist für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(\sqrt{z}\right)^2 = \operatorname{sqrt}(z)^2 = \left[\exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right)\right]^2 = \exp\big(\log(z)\big) = z \ .$$

Beachte: Ist $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, +\pi)$, so ist

$$\sqrt{z} = \operatorname{sqrt}(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\big(\ln(r) + i\varphi\big)\right) = e^{\frac{1}{2}\ln(r)} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \ .$$

Man kann auf $\mathbb{C}^*$ auch keinen (globalen) Zweig der Quadratwurzel finden.

(4) Vorsicht: Wegen der fehlenden Existenz eines globalen Logarithmus oder Quadratwurzel gelten im Allgemeinen <u>nicht</u> die Funktionalgleichungen

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) \tag{5.5}$$
$$\sqrt{zw} = \operatorname{sqrt}(zw) = \operatorname{sqrt}(z)\operatorname{sqrt}(w) = \sqrt{z}\sqrt{w} \ , \tag{5.6}$$

wenn $z, w, z+w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ ist. Z.B. ist für $z = w = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\log(zw) = \log\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right) = -i\frac{\pi}{2} \neq i\frac{3\pi}{4} = \log(z) + \log(w)$$

bzw.

$$\sqrt{zw} = \operatorname{sqrt}(zw) = \operatorname{sqrt}(e^{i\frac{3\pi}{2}}) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \neq e^{i\frac{3\pi}{4}} = \operatorname{sqrt}(z) \cdot \operatorname{sqrt}(w) = \sqrt{z}\sqrt{w} \ .$$

Für welche Paare (z, w) gilt Gleichung (5.5) oder Gleichung (5.6) trotzdem? ✎ *Übung* ✐

Satz 5.12. Umkehrsatz
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $p \in G$ und $f'(p) \neq 0$. Es existieren dann offene Umgebungen U von p und $V \subseteq \mathbb{C}$ von $q := f(p)$, so dass $f(U) = V$ ist und $f\big|_U : U \to V$ *biholomorph* ist, d.h. $f\big|_U : U \to V$ ist bijektiv und $\left(f\big|_U\right)^{-1}$ ist auch holomorph.

<u>¡? Beweis ¿!</u>

Ist $f = u + iv$, so ist wegen 1.2.2

$$f'(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{1}{2}\left(D_x f - iD_y f\right) = \frac{1}{2}\big((D_x u + \underbrace{D_y v}_{=D_x u}) + i(D_x v - \underbrace{D_y u}_{=-D_x v})\big) = D_x u + iD_x v \ ,$$

also

$$|f'(p)|^2 = (D_x u)^2 + (D_x v)^2 \ .$$

Wegen

$$\det\big(Df(p)\big) = \det\begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix} \overset{1.2.2}{=} (D_x u)^2 + (D_x v)^2 = |f'(p)|^2 \neq 0$$

existieren nach dem reellen Umkehrsatz deshalb offene Umgebungen $U \subseteq G$ von p und $V \subseteq \mathbb{C}$ von q, so dass $f(U) = V$ und $f\big|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist (siehe MfPh3Diff Satz 6.4.). Weil aber $Df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deshalb ein $\mathbb{R}$-Isomorphismus und $\mathbb{C}$-linear ist, ist damit auch $Df(z)^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear für alle $z \in G$, d.h. $(f\big|_U)^{-1}$ ist holomorph.
QED$_\blacktriangle$

5.2.6 Kommentar

(1) Sei $z_0 \in \mathbb{C}^*$ beliebig und $w_0 \in \mathbb{C}$ ein Urbild von z_0 unter exp, $e^{w_0} = z_0$ (vgl. 5.2.4). Da nun

$$\exp'(w_0) = \exp(w_0) \neq 0$$

ist, folgt aus Satz 5.12., dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{C}$ von w und $V \subseteq \mathbb{C}^*$ von z gibt, so dass $\exp\big|_U : U \to V$ biholomorph ist. Setzt man $f := (\exp\big|_U)^{-1} : V \to U$, so ist f offenbar ein Zweig des Logarithmus, denn für alle $z \in V$ ist nun ja

$$\exp \circ f(z) = z \ .$$

Es gibt also für alle $z \in \mathbb{C}^*$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}^*$ mit einem Zweig $f : V \to \mathbb{C}$ des Logarithmus.

(2) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $\operatorname{pot}_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die k-te Potenzfunktion,

$$\operatorname{pot}_k(z) = z^k \ .$$

Wir nennen $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) einen *Zweig der k-ten Wurzel*, wenn für alle $z \in G$ gilt:

$$f(z)^k = z \ .$$

Wegen $\operatorname{pot}_k'(z) = kz^{k-1} \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$, sieht man wie unter (1): Für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}^*$ und einen Zweig $f : V \to \mathbb{C}$ der k-ten Wurzel.

(3) Ist $G = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^-$ und $\log : G \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus, so heißt $\sqrt[k]{} : G \to \mathbb{C}$,

$$\sqrt[k]{z} := \exp\left(\frac{1}{k}\log(z)\right)$$

der *Hauptzweig der k-ten Wurzel*. Tatsächlich ist

$$\left(\sqrt[k]{z}\right)^k = \exp\left(\frac{1}{k}\log(z)\right)^k = \exp \circ \log(z) = z \ ,$$

für alle $z \in G$. Ist $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$, so gilt ✎ *Übung* ✐

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r}e^{i\frac{\varphi}{k}}$$

(wo $r \to \sqrt[k]{r}$ die übliche reelle k-te Wurzel ist).

Satz 5.13. Lokale Normalform holomorpher Funktionen
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, sowie $k := \operatorname{ord}_p(f) \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von p und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit $h(p) = 0$ und $h'(p) \neq 0$, so dass für alle $z \in U$ gilt:

$$f(z) = f(p) + h(z)^k \ .$$

5.2.7 Kommentar

(1) Ist $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) holomorph und nicht konstant, so ist für jedes $p \in G$ auch f auf keiner Umgebung von p konstant (Satz 5.9.). Es ist also $k = \operatorname{ord}_p(f)$ definiert (vgl. 5.1.9).

(2) Nach Satz 5.12. ist $h : U \to \mathbb{C}$ auf einem evtl. verkleinerten U biholomorph auf eine offene Umgebung V von 0: ein *holomorpher Koordinatenwechsel*. Die Translation $T_q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$T_q(z) = z + q$$

ist ohnehin biholomorph (denn $T_{-q} = T_q^{-1}$). Satz 5.13. besagt damit, dass sich f lokal um p bis auf die Koordinatenwechsel h und T_q ($q = f(p)$) verhält wie die k-Potenzfunktion um 0,

$$f\big|_U = T_q \circ \operatorname{pot}_k \circ h \ .$$

¡? Beweis ¿! von Satz 5.13.

Nach Lemma 5.8. gibt es zunächst ein $g \in H(G)$, so dass für alle $z \in G$ gilt:

$$f(z) = f(p) + (z-p)^k g(z)$$

und $g(p) \neq 0$. Wegen 5.2.6(2) können wir eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}^*$ von $g(p)$ wählen mit einem Zweig $\Psi : V \to \mathbb{C}$ der k-ten Wurzel. Wir setzen dann $U := g^{-1}(V) \subseteq G$ und $h : U \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = (z-p) \cdot \Psi\big(g(z)\big) \ .$$

Dann ist offenbar

$$h(z)^k = (z-p)^k \cdot \Psi\big(g(z)\big)^k = (z-p)^k g(z) = f(z) - f(p) \ ,$$

für alle $z \in U$, weiterhin $h(p) = 0$ und auch

$$h'(p)^k = \Psi\big(g(p)\big)^k = g(p) \neq 0 \ ,$$

also $h'(p) \neq 0$.
QED

Korollar 5.14.
Ein holomorphes $f : G \to \mathbb{C}$ ist lokal um ein $p \in G$ injektiv, genau dann wenn $f'(p) \neq 0$ ist.

¡? Beweis ¿!

$\Leftarrow$ Satz 5.12..

$\Rightarrow$ Sei $k = \mathrm{ord}_p(f)$ und $U \subseteq G$ eine Umgebung mit einem biholomorphen $h : U \to V$, V eine Nullumgebung, und

$$f\big|_U = T_q \circ \mathrm{pot}_k \circ h \ .$$

Weil aber pot_k für $k \geq 2$ auf keiner Umgebung von 0 injektiv ist (ist $w^k = 1$, $w \neq 1 \Rightarrow \mathrm{pot}_k(wz) = \mathrm{pot}_k(z)$), muss $k = 1$ sein. Aber dann ist

$$f'(p) = \frac{d}{dz}\Big|_p \big(f(p) + h(z)\big) = h'(p) \neq 0 \ .$$

QED

5.2.8 Kommentar

Auch diese Aussage ist – wie so viele andere – im Reellen falsch! Z.B. ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ injektiv, aber $f'(0) = 0$.

Satz 5.15. von der Gebietstreue
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f *eine offene Abbildung*, d.h. mit jedem offenen $U \subseteq G$ ist auch $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen.

5.2.9 Kommentar

Stetige Abbildungen $f : X \to Y$ (zwischen metrischen Räumen) erhalten den Wegzusammenhang (und auch Zusammenhang), d.h. ist $A \subseteq X$ wegzusammenhängend, so auch $f(A) \subseteq Y$. Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist eine wegzusammenhängende und offene Menge (und holomorphe Funktionen sind stetig). Kommentar 5.2.3 besagt daher tatsächlich, dass nicht-konstante holomorphe Funktionen gebietstreu sind: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht-konstant, dann ist $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ ebenfalls ein Gebiet.

¡? Beweis ¿! von 5.2.8

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{pot}_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ offen, denn lokal um $z \neq 0$ sowieso wegen $\mathrm{pot}_k'(z) \neq 0$ und Satz 5.12. und $\mathrm{pot}_k\big(B_r(0)\big) = B_{r^k}(0)$ für $r > 0$.

Ist daher $U \subseteq G$ offen, $q = f(p) \in f(U)$ beliebig, $k = \mathrm{ord}_p(f)$, so wähle $h : \tilde{U} \to V$ biholomorph mit $\tilde{U} \subseteq U$ offene Umgebung von p. Wegen Satz 5.13. ist dann $f\big|_{\tilde{U}} = T_q \circ \mathrm{pot}_k \circ h$, also

$$q \in f(\tilde{U}) = \underbrace{T_q\Big(\underbrace{\mathrm{pot}_k\big(\underbrace{h(\tilde{U})}_{\text{offen}}\big)}_{\text{offen}}\Big)}_{\text{offen}} \subseteq f(U)$$

offen. Also ist $f(U)$ offen.
QED

Korollar 5.16. Maximumsprinzip
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $p \in G$ derart, dass es ein $r > 0$ gibt mit $B_r(p) \subseteq G$ und

$$|f(z)| \leq |f(p)| \ ,$$

für alle $z \in B_r(p)$ (ein *lokales Maximum*). Dann ist f konstant.

¡? Beweis ¿!

Wäre f nicht konstant, so wäre $f\big(B_r(p)\big)$ offene Umgebung von $q := f(p)$ (für jedes $r > 0$). Aber dann gibt es also auch ein $z \in B_r(p)$ mit $|f(z)| > |q| = |f(p)|$. ↯ Widerspruch ↯
QED

Kapitel 6

Residuen Satz

08.06.2008

6.1 Laurent Reihen

6.1.1 Erinnerung

(1) Wir haben schon erwähnt (und werden später noch beweisen), dass der Cauchysche Integralsatz nicht nur für achsenparallele Rechtecke (siehe Lemma 3.2.) oder Dreiecke (vgl. 3.2.2) gilt, sondern für beliebige Kompakta mit (stückweise) glattem Rand (vgl. Theorem 3.6.). Ist G ein Gebiet, $K \subseteq G$ ein Kompaktum mit (stückweise) glattem Rand, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 0\ .$$

(2) Wir werden auch später erst genau definieren wann ein Kompaktum $K \subseteq G$ einen glatten Rand hat. Jedenfalls ist dann ∂K Bild einer *Kette von Wegen*

$$c = \lambda_1\gamma_1 + \cdots + \lambda_r\gamma_r \qquad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{Z}\ ,\ j = 1, \ldots, r$$

(das ist eine formale Summe von Wegen $\gamma_j : [0,1] \to G$) und $\int_{\partial K}$ wird dann definiert durch:

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \int_{\gamma_j} f(z)\, dz\ .$$

Beispielsweise ist $\partial B_r(p)$ das Bild von $\gamma : [0,1] \to G$, $\gamma(t) = p + re^{it}$, während für einen *Kreisring*

$$A_{r_1 r_2}(p) := \big\{ z \in \mathbb{C} \big| r_1 < |z| < r_2 \big\}$$

gilt:

$$\partial\big(A_{r_1 r_2}(p)\big) = \gamma_1 - \gamma_2$$

mit $\gamma_1(t) = p + r_1 e^{it}$, $\gamma_2(t) = p + r_2 e^{it}$.

6.1.2 Beispiel

Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $0 \in \overset{\circ}{K} = K \backslash \partial K$, so gilt:

$$\int_{\partial K} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i\ .$$

Man wähle nämlich $r > 0$ so klein, dass $\overline{B_r(0)} \subseteq \overset{\circ}{K}$ ist. Dann ist auch $A := K \backslash B_r(0)$ Kompaktum mit glattem Rand und $\partial A = \partial K - \partial B_r(0)$ (als Kette). Also ist wegen $A \subseteq \mathbb{C}^*$ und $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph zunächst $\int_{\partial A} \frac{dz}{z} = 0$ und damit (vgl. Lemma 4.4.)

$$\int_{\partial K} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\partial B_r(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i\ .$$

6.1.3 Kommentar

(1) Deshalb gilt nun auch die Cauchysche Integralformel in folgender allgemeinerer Version als Satz 4.3.. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $K \subseteq G$ kompakt mit glattem Rand, so gilt für alle $z \in \overset{\circ}{K}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

Denn wie im Beweis von Satz 4.3. ist dann $g : G \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

holomorph und damit nach Theorem 3.6. und 6.1.2

$$0 = \int_{\partial K} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int_{\partial K} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i} .$$

(2) Mit diesem Mittel ausgestattet können wir nun auch holomorphe Funktionen mit *isolierten Singularitäten* untersuchen.

Definition 6.1.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir sagen, dass f eine holomorphe Funktion auf G mit einer isolierten Singularität in $p \in G$ ist, wenn $f : G \backslash \{p\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist.

Definition 6.2.

(a) Eine *komplexe Laurent-Reihe* ist ein formaler Ausdruck der Form

$$L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n X^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Es heißt dann $H := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n X^n$ der *Hauptteil von* L und $T := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ der *Nebenteil von* L. Es ist dann (im $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Laurent-Reihen:

$$L = H + T \; .$$

(b) Eine komplexe Laurent-Reihe $L = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n X^n$ heißt *konvergent in* $z \in \mathbb{C}^*$, wenn sowohl

$$H(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

als auch

$$T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

konvergieren. Man setzt dann $L(z) := H(z) + T(z)$.

6.1.4 Kommentar

(1) Eine Laurent-Reihe L braucht im Allgemeinen nirgends zu konvergieren (z.B. $L = \sum X^n$).

(2) Ist $L = H+T$ die Zerlegung in Haupt- und Nebenteil und ist $1/R_1 \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}X^n$ sowie $R_2 \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius von $T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ und ist $R_1 < R_2$, so konvergiert L offenbar auf dem Kreisring

$$A_{R_1,R_2}(0) = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \middle| R_1 < |z| < R_2 \right\}$$

und definiert damit eine Funktion $f_L : A \to \mathbb{C}$, $f_L(z) = L(z)$.

(3) Weil die Polynome (bzw. rationalen Funktionen) $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ bzw. $z \mapsto \sum_{k=-n}^{-1} a_k z^k$ holomorph sind und kompakt gegen f_T bzw. f_H konvergieren, folgt: f_L ist holomorph.

(4) Nicht direkt klar ist hier, ob die Zuordnung $L \to f_L$ injektiv ist und auch nicht, ob jede holomorphe Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ so zu Stande kommt.

Satz 6.3.
Sei $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ und $A = A_{R_1,R_2}(0)$. Es sei $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert genau eine Laurent-Reihe $L = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$, so dass für alle $z \in A$ gilt:

$$f(z) = L(z) \ .$$

Die Koeffizienten von L sind dabei für ein beliebiges $r \in (R_1, R_2)$ gegeben durch $(n \in \mathbb{Z})$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{\zeta^{n+1}} \ .$$

¡? Beweis ¿!

Eindeutigkeit: Sei also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

auf $A := A_{R_1,R_2}(0)$. Wir wollen zeigen, dass (für beliebiges $r \in (R_1, R_2)$)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

ist. Da $\mathrm{pot}_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\mathrm{pot}_n(z) = z^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ eine Stammfuntion hat (nämlich $\frac{1}{1+n}\mathrm{pot}_{n+1}$) ist also für $r > 0$:

$$\int_{\partial B_r(0)} z^n\ dz = 0 \quad \text{für } n \neq -1 \ ,$$

während

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

ist. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist deshalb

$$2\pi i a_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{\partial B_r(0)} z^{k-n-1}\ dz \ ,$$

und weil die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$ gleichmäßig auf $\mathcal{C} = \partial B_r(0)$ gegen ihre Grenzwerte konvergieren, ist auch:

$$2\pi i a_n = \int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z^{n+1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k\ dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)\ dz}{z^{n+1}} \ .$$

Existenz: Sei $z \in A$ beliebig. Wähle $r_1, r_2 > 0$ mit

$$R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$$

und setze $K := \overline{A}_{r_1,r_2}$. Dann ist (als Kette) $\partial K = \partial B_{r_2}(0) - \partial B_{r_1}(0)$ und deshalb ist nach 6.1.3:

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial B_{r_1}(0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} .$$

Nun ist für $\zeta \in \partial B_{r_2}(0)$: $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$ und deshalb

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} ,$$

während für $\zeta \in \partial B_{r_1}$ gilt: $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$ und daher

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta}{z} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{\zeta^{-n}}{z^{-n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^{n-1}}{\zeta^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihen auf $\partial B_{r_1}(0)$ bzw. $\partial B_{r_2}(0)$ gilt deshalb:

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right) z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\partial B_{r_1}(0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right) z^n .$$

Anwendung von 6.1.1(1) auf die Kompakta $\overline{A}_{r,r_2}$ und $\overline{A}_{r_1,r}$ (zu vorgegebenem $r \in (R_1, R_2)$) liefert dann, dass man $\partial B_{r_i}(0)$ $(i = 1, 2)$ durch $\partial B_r(0)$ ersetzen kann, also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right) z^n .$$

QED

6.1.5 Kommentar

(1) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ und f holomorph auf G mit isolierter Singularität in p, $f \in H(G \backslash \{p\})$, so gilt für jedes $r > 0$, so dass $\overline{B_r(p)} \subseteq G$ ist, für alle $z \in B_r(p) \backslash \{p\}$:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(p)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - p)^{n+1}} \right) (z - p)^n ,$$

denn wendet man an Satz 6.3. auf $g : A_{0,r+\varepsilon} \to \mathbb{C}$ (mit $\varepsilon > 0$ klein genug), $g(z) := f(p + z)$ an, so folgt

$$f(z) = g(z-p) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right) (z-p)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(p)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - p)^{n+1}} \cdot (z-p)^n .$$

(2) Ist $f \in H(G \backslash \{p\})$, so nennen wir daher

$$L_{f,g} := \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(p)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - p)^{n+1}} \right) X^n$$

(mit einem $r > 0$ so klein, dass $\overline{B_r(p)} \subseteq G$ ist), die *Laurent-Reihe von f in p*.

Man beachte, dass der Konvergenzradius $\frac{1}{R_1}$ des Hauptteils $H_{f,g}$ von $L_{f,g}$ gleich Null ist, während der des Nebenteils mindestens $R_2 \geq \operatorname{dist}(p, \partial G)$ ist.

6.2 Singularitäten

Definition 6.4.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet $p \in G$ und $f \in H(G \backslash \{p\})$. Es heißt dann die isoliete Singularität p von f

(a) *hebbar*, wenn es eine holomorphe Fortsetzung $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$ gilt (d.h. $\hat{f}\big|_{G \backslash \{p\}} = f$);

(b) ein *Pol*, wenn $\lim_{z \longrightarrow p} |f(z)| = \infty$ ist;

(c) eine *wesentliche Singularität*, wenn p weder hebbar, noch ein Pol ist.

6.2.1 Beispiele

(I) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

hat eine hebbare Singularität in p, denn $\sin z = \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z - \frac{1}{3} z^3 \pm \ldots$, also ist

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

(also $\hat{f}(0) = 1$) eine holomorphe Fortsetzung.

(II) Natürlich hat $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ in $p = 0$ einen Pol.

(III) Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp \frac{1}{z}$$

hat in p eine wesentliche Singularität. Sie ist nicht stetig fortsetzbar in $p = 0$, denn z.B. $f(\frac{1}{n}) = \exp(n) \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$ und hat auch keinen Pol, denn für $z_n := \frac{1}{2\pi i n} = -\frac{i}{2\pi n}$ ist $(z_n) \longrightarrow 0$ und $f(z_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.5. Riemannscher Hebbarkeitssatz
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ und f holomorph auf G mit isolierter Singularität in p. Sei $r > 0$ mit $B_r(p) \subseteq G$ so, dass $f\big|_{B_r(p) \backslash \{p\}}$ beschränkt ist. Dann ist die Singularität p von f hebbar.

¡? Beweis ¿! (vgl. auch Lemma 4.1.)
Wir betrachten $g : G \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} (z-p) f(z) & \text{für } z \neq p \\ 0 & \text{für } z = p \end{cases} .$$

Es ist dann $g\big|_{G \backslash \{p\}}$ holomorph und (wegen der lokalen Beschränktheit von f um p) stetig in p,

$$\lim_{z \longrightarrow p} g(z) = 0 = g(p) \ .$$

Daher ist g sogar holomorph (vgl. 4.1.4(1ii)). **O.B.d.A.** sei nun $f \neq 0$ (dann ist Satz 6.5. sowieso richtig), also nicht-konstant. Nach Lemma 5.8. existieren deshalb ein $h \in H(G)$, so dass

$$g(z) = (z-p)^k h(z)$$

ist, und $h(p) \neq 0$ und $k = \operatorname{ord}_p(g) \geq 1$, weil $g(p) = 0$ ist. Deshalb ist nun $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(z) = (z-p)^{k-1} h(z)$$

(also $\hat{f}(p) = h(p)$ bei $k = 1$ und $\hat{f}(p) = 0$ bei $k \geq 2$) eine holomorphe Fortsetzung von f. (Beachte $f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)} = (z-p)^{k-1} h(z)$ auf $B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$.)
QED$_\blacktriangle$

Satz 6.6. von Casorati-Weierstraß
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ und $f \in H(G \backslash \{p\})$ habe in p eine wesentliche Singularität. Dann liegt für jedes $\varepsilon > 0$ das Bild $f\big(B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}\big) \subseteq \mathbb{C}$ dicht in $\mathbb{C}$ (d.h. $\overline{f\big(B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}\big)} = \mathbb{C}$).

¡? Beweis ¿!

Angenommen: Es gilt $\varepsilon > 0$, $r > 0$ und $w \in \mathbb{C}$ mit

$$f\big(B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}\big) \cap B_r(w) = \emptyset\ .$$

Zu zeigen: p ist hebbar oder p ist Pol.
Wir setzen dann $g : B_\varepsilon(p) \backslash \{p\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}\ .$$

Es ist dann $g \in H\big(B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}\big)$ und wegen $|f(z) - w| \geq r$ für alle $z \in B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$ auch beschränkt, $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für alle $z \in B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$. Nach Satz 6.5. ist also g holomorph fortsetzbar (p hebbar für g) zu einem $\hat{g} \in H\big(B_\varepsilon(p)\big)$.

Fall 1: $\hat{g}(p) \neq 0$. Dann ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$ und wir können f wegen

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}\ ,\ z \in G \backslash \{p\}$$

mit $\hat{f}(p) := w + \frac{1}{\hat{g}(z)}$ holomorph in p fortsetzen. Es ist also p dann hebbar für f.

Fall 2: $\hat{g}(p) = 0$. Dann ist g nicht-konstant und wegen Lemma 5.8. (wenn wir $\varepsilon > 0$ evtl. verkleinern) gibt es daher ein $h \in H\big(B_\varepsilon(p)\big)$ mit $h(p) \neq 0$ und

$$\hat{g}(z) = (z-p)^k h(z)$$

mit $k = \operatorname{ord}_p \hat{g} \geq 1$. Nach evtl. Verkleinerung von ε dürfen wir auch annehmen, dass $h(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(p)$. Es ist dann

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{\frac{1}{h(z)}}{(z-p)^k} \quad \text{für } z \in B_\varepsilon(p) \backslash \{p\}$$

und daher

$$\lim_{z \longrightarrow p} |f(z)| = \infty\ ,$$

also p ein Pol für f.

QED$_\blacktriangle$

6.2.2 Kommentar

(1) Für $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ gilt sogar: $f\big(B_\varepsilon(0)\backslash\{p\}\big) = \mathbb{C}^*$ für alle $\varepsilon > 0$. ✎ *Übung* ✐

(2) Der *große Satz von Picard* besagt, dass für eine wesentliche Singularität p das Bild jeder noch so kleinen Scheibe $f\big(B_\varepsilon(0)\backslash\{p\}\big)$ höchstens einen Punkt in $\mathbb{C}$ auslässt.

Satz 6.7.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ und f holomorph mit isolierter Singularität in p, $f \in H(G\backslash\{p\})$. Sei

$$L_{f,p} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$$

die Laurent-Reihe von f in p. Dann gilt:

(a) p ist hebbar, genau dann wenn $a_n = 0$ ist, für alle $n \leq -1$;

(b) p ist ein Pol, genau dann wenn es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{-d} \neq 0$ und $a_{-d-n} = 0$, für alle $n \geq 1$;

(c) p ist wesentlich, genau dann wenn für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{-n} \neq 0$.

¡? Beweis ¿!

(a) $\Rightarrow$ Ist p hebbar (mit $\hat{f}$), so ist für alle $z \in B_r(p)\backslash\{p\}$ (mit $r > 0$ klein genug)

$$L_{f,p}(z) = f(z) = T_{\hat{f},p}(z) = T_{f,p}(z) \ ,$$

weil die Laurent-Reihe von f in p eindeutig bestimmt ist. Also ist $H_{f,g} = 0$.

$\Leftarrow$ Ist $L = H + T$ die Laurent-Reihe von f in p, so ist also nach Vorraussetzung $H = 0$. Mit $\hat{f}(p) := T(p) = a_0$ ist also f holomorph fortsetzbar.

(b) $\Rightarrow$ Ist p ein Pol, so wähle $r > 0$, so dass $B := B_r(p) \subseteq G$ ist und $|f(z)| \geq 1$ für $z \in B\backslash\{p\}$. Es ist dann $g := B\backslash\{p\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) := \frac{1}{f(z)} \ ,$$

holomorph auf $B\backslash\{p\}$ und beschränkt (durch 1), also nach Satz 6.5. holomorph fortsetzbar mit $\hat{g} : B \to \mathbb{C}$. Da $|f(z)| \longrightarrow \infty$ für $z \longrightarrow p$, folgt $\hat{g}(0) = \lim_{z \longrightarrow p} \frac{1}{f(z)} = 0$. Wegen $g(z) \neq 0$ für $z \neq p$, ist $\hat{g}$ nicht konstant, also gibt es ein $h \in H(B)$ mit $h(p) \neq 0$ und

$$\hat{g}(z) = (z-p)^k h(z) \ ,$$

$k = \mathrm{ord}_p \hat{g} \geq 1$ und **o.B.d.A.** (sonst verkleinere $r > 0$): $h(z) \neq 0$ für alle $z \in B$. Es ist dann

$$\frac{1}{h(z)} = T_{\frac{1}{h},p}(z-p) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-p)^n$$

mit $b_0 = \frac{1}{h(z)} \neq 0$. Es folgt :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-p)^n = L_{f,p}(z-p) = f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-p)^{-k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-p)^n \right) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z-p)^n \ .$$

Mit $d := k$ folgt die Behauptung.

$\Leftarrow$ Ist $f(z) = \sum_{n=-d}^{\infty} b_n(-p)^n$ für $z \in B_\varepsilon(p)\backslash\{p\}$ (für $r > 0$ klein genug), so ist mit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-k}(z-p)^n$??????? was ist *kbzw.d* ??????????? für $B_\varepsilon(p)$, also $g \in H\big(B_\varepsilon(p)\big)$ offenbar $f(z) = (z-p)^{-d} g(z)$ und damit

$$\lim_{z \longrightarrow p} |f(z)| = \infty \ ,$$

d.h. p ist ein Pol.

(c) folgt durch Negation von a und b.

QED$_\blacktriangle$

6.2.3 Kommentar

(1) Ist p ein Pol von $f \in H(G\backslash\{p\})$ ($G \in \mathbb{C}$ ein Gebiet), so heißt mit $L_{f,p} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n X^n$

$$\mathrm{Pol}_p(f) := d = -\min\big\{k \in \mathbb{Z} \big| a_k \neq 0\big\} \in \mathbb{N}$$

die *Polstellenordnung von f in p.*

(2) Erinnere an die Formel in Satz 6.3. für die Koeffizienten aus der Laurent-Reihe einer Funktion $f \in H(G\backslash\{p\})$ mit einer isolieren Singularität in p, insbesondere ist mit $L_{f,p} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(p)} f(z)\ dz$$

(mit einem $r > 0$ so klein, dass stets $\overline{B_r(p)} \subseteq g$ ist), unabhängig von r.

Definition 6.8.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G\backslash\{p\})$ holomorph mit isolierter Singularität. Sei $L = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$ die Laurent-Reihe von f in p. Dann heißt der Koeffizient $a_{-1} =: \mathrm{res}_p(f) \in \mathbb{C}$ das *Residuum von f in p.*

6.2.4 Beispiele

(I) $z_k := k\pi \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{Z}$) sind die einzigen Nullstellen von $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ✎ *Übung* ✐. Wir betrachten daher

$$f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{C} \ , \ f(z) = \frac{z}{\sin z} \ .$$

(i) Dann ist $p = 0$ hebbar, denn $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ (für $z \neq 0$) hat ein hebbares p (vgl. Satz 6.5.) mit $\lim_{z \longrightarrow p} g(z) = \hat{g}(p) = 1$. Es folgt, dass $\lim_{z \longrightarrow p} f(z) = 1$ ist, also p auch hebbar für f. Insbesondere ist $\mathrm{res}_p(f) = 0$.

(ii) Es ist $p = \pi$ ein (einfacher, d.h. $\mathrm{Pol}_p(f) = 1$) Pol, denn $\lim_{z \longrightarrow \pi} \left|\frac{z}{\sin z}\right| = \infty$. Wegen $\sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$ ist $\sin(z) = -(z-\pi) + \ldots$, also $\lim_{z \longrightarrow \pi} \frac{\sin(z)}{(z-\pi)} = -1$. Es folgt:

$$\mathrm{res}_\pi(f) = \lim_{z \longrightarrow \pi} (z-\pi) f(z) = \lim_{z \longrightarrow \pi} \pi \cdot \frac{z-\pi}{\sin z} = -\pi \ .$$

(II) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat in $p = 0$ eine wesentliche Singularität (vgl. 6.2.1(III)) und es ist

$$L_{f,0}(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n \ ,$$

insbesondere also $a_{-n} = \frac{1}{n!} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathrm{res}_0(f) = a_{-1} = 1 \ .$$

Theorem 6.9. Residuensatz
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subseteq G$ ein Kompaktum mit (stückweise) glattem Rand ∂K und $p_1, \ldots, p_r \in \overset{\circ}{K}$ $(= K \backslash \partial K)$. Ist nun f holomorph auf G mit isolierten Singularitäten in $p_1, \ldots, p_r$, also $f \in H(G \backslash \{p_1, \ldots, p_r\})$, so gilt:

$$\int_{\partial K} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \operatorname{res}_{p_j}(f)\ .$$

¡? Beweis ¿!

Man wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{\varepsilon(p_j)}} \subseteq \overset{\circ}{K}$ und auch

$$\overline{B_{\varepsilon_i}(p_i)} \cap \overline{B_{\varepsilon_j}(p_j)} = \emptyset$$

ist für $i \neq j$. Dann setze man $\tilde{K} := K \backslash \bigcup_{j=1}^{r} B_\varepsilon(p_j)$. Dann ist auch $\tilde{K}$ kompakt mit glattem Rand und (als Ketten gilt):

$$\partial \tilde{K} = \partial K - \partial B_\varepsilon(p_1) - \cdots - \partial B_\varepsilon(p_r)\ .$$

Weil nun $f\big|_{G \backslash \bigcup_{j=1}^{r} \overline{B_{\varepsilon/2}(p_j)}}$ holomorph ist und $\tilde{K} \subseteq G \backslash \bigcup_{j=1}^{r} \overline{B_{\varepsilon/2}(p_j)}$ Kompaktum mit glattem Rand ist, ist (vgl. 6.1.1(1)):

$$\int_{\partial \tilde{K}} f(z)\ dz = 0\ .$$

Es folgt:

$$\int_{\partial K} f(z)\ dz = \sum_{j=1}^{r} \int_{\partial B_\varepsilon(p_j)} f(z)\ dz \overset{6.2.3(2)}{=} 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \operatorname{res}_{p_j}(f)\ .$$

QED$_\blacktriangle$

6.2.5 Anwendung

Mit dem Residuensatz kann man manchmal (uneigentliche) reelle Integrale berechnen (obwohl die Integranden z.B. keine elementare Stammfunktion besitzen), beispielsweise:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)\ dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}\ .$$

Wegen $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ berechnen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\ dx\ .$$

Betrachte dazu für $t \in [0, \pi] : \gamma_r(t) = re^{it}$, $\mathcal{C}_r = \operatorname{Bild}(\gamma_r)$. Es ist dann wegen $\Im(z) \geq 0$ für $z \in \mathcal{C}_r$ $(r > 1)$:

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-\Im(z) + i\Re(z)}\right| = e^{-\Im(z)} \leq 1$$

und wegen

$$r^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = \left|1 + z^2 - 1\right| \leq \left|1 + z^2\right| + |-1| = \left|1 + z^2\right| + 1$$

gilt

$$\left|1 + z^2\right| \geq r^2 - 1$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{1+z^2} \leq \frac{1}{r^2 - 1}\ .$$

Daher:

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz\right| \leq \frac{1}{r^2-1}\; L[\gamma_r] = \frac{\pi r}{r^2-1} \quad \underset{\infty}{\overset{r}{\longrightarrow}} \quad 0\ .$$

Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}\ dx}{1+x^2} = \lim_{r\longrightarrow\infty} \int_{-r}^{+r} \frac{e^{ix}\ dx}{1+x^2} = \lim_{r\longrightarrow\infty} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{e^{iz}\ dz}{1+z^2}\ .$$

Mit $\mathcal{C}_r = \partial K_r$ mit $K_r = \overline{B_r(0)} \cap \left\{z \middle| \Re(z) \geq 0\right\}$ und von den zwei isolierten Singularitäten von $z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ liegt genau eine bei $p = +i$ in $\overset{\circ}{K}_r$ (die andere $q = -i \notin K_r$). Wir rechnen nun:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \underbrace{\frac{1}{z+i}}_{\text{holomorph um } i}\right)\ .$$

Damit

$$\operatorname{res}_i\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{2i}$$

und

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\ e^{iz}\Big|_{z=i}}_{=a_n}(z-i)^n = e^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-i)^n\ .$$

Es folgt

$$\operatorname{res}_i\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \frac{e^{-1}}{2i}\ .$$

Ähnlich sieht man $\operatorname{res}_{-i}\left(\frac{e^{-iz}}{1+z^2}\right) = \frac{e^{-1}}{2i}$. Also ist

13.06.2008

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\frac{1}{2ie} + \frac{1}{2ie}\right) = \frac{\pi}{e}\ .$$

Index