Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
23.7.2021

Übungsklausur Integralsätze

Hinweise: Diese Übungsklausur können Sie zu Hause lösen, sie wird nicht korrigiert. Die Klausur zu Mathe für Physiker 4 (60 Minuten Funktionentheorie und 30 Minuten Integralsätze) findet am Samstag, 31.7.2021 um 12:00 bis 13:30 Uhr im Hörsaal N6 statt. Bitte melden Sie sich SOWOHL auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de` ALS AUCH auf `http://alma.uni-tuebingen.de` zur Klausur an. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 100. Alle Fakten, die in der Vorlesung oder den Übungen erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (25 Punkte)

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Das Wegintegral eines stetigen Vektorfeldes in $\mathbb{R}^3$ über einen geschlossenen Weg ist immer 0.

b) $\underline{f}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{2}{x+y}, z^2\right)$ ist ein Gradientenfeld in $(0, \infty)^3 \subset \mathbb{R}^3$.

c) Ein stetiges Vektorfeld $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist konservativ genau dann, wenn Wegintegrale über $\underline{f}$ nur von Anfangs- und Endpunkten der Wege abhängen.

d) Es gibt nicht-konservative C^1-Vektorfelder $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen.

e) Alle Flächen im $\mathbb{R}^3$ sind orientierbar.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Gegeben sei eine C^1-Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$, gesucht ihr Schwerpunkt $\underline{a}$ unter der Annahme, dass die Flächendichte der Masse auf $\mathcal{F}$ konstant ist.

a) Drücken Sie die Komponenten a_1, a_2, a_3 von $\underline{a}$ durch Flächenintegrale aus.

b) Sei $\mathcal{F}$ die nördliche Hemisphäre vom Radius 1 mit Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie $\underline{a}$.

Tipp: Die Sphäre vom Radius r ist in Kugelkoordinaten parametrisiert durch

$$\phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

mit Azimut (Längengrad) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und Ko-Polwinkel (Breitengrad) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt einer idealen Helixfläche $H \subset \mathbb{R}^3$ (eine imperfekte Helixfläche finden Sie unten im Bild). Die Fläche H sei wie folgt festgelegt:

a) Windungsachse sei die z-Achse.

b) Jeder Punkt in H liegt auf einer Helixkurve der Form $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, t)^T$.

c) Die Fläche beinhalte eine einzige Umdrehung.

d) Der Abstand der Punkte in H zur z-Achse betrage zwischen 0 und 1.

Tipp: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^1 dy\,\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}(\sinh^{-1}(1) + \sqrt{2})$.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Sei $N \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich. Beweisen Sie, dass das Volumen von N gleich $\frac{1}{3}\int_{\partial N} \underline{x} \cdot d\underline{S}$ ist.