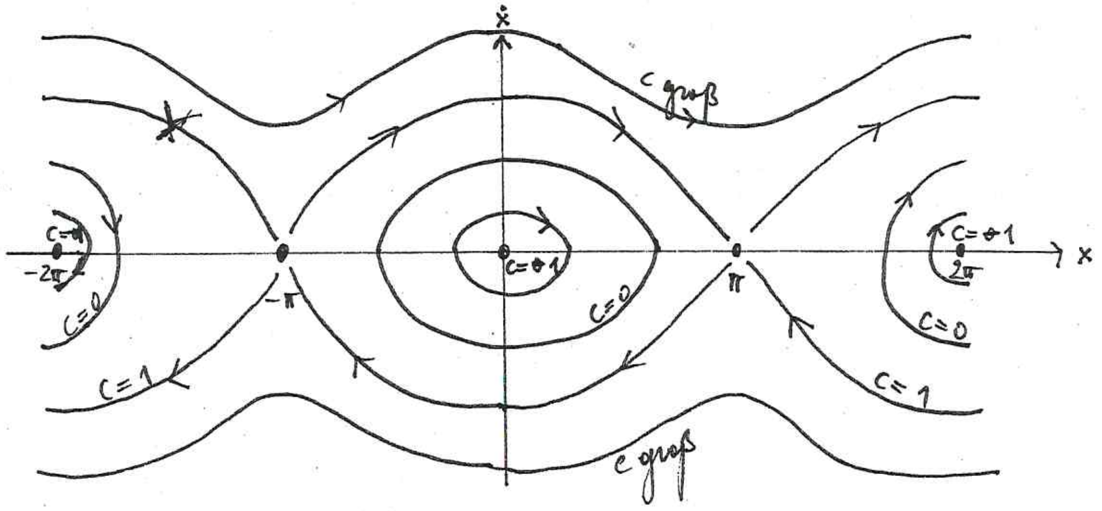
sollte und so z.B. nur zwei Gleichgewichtslagen hat: bei $x=0$ die „untere" und bei $x=\pm\pi$ die „obere".



Phasendiagramm
zu $\ddot{x} + \sin x = 0$

§3. Die Keplerschen Gesetze

So lange es Menschen gibt, so lange gibt es vermutlich auch die Faszination über den nächtlichen Sternenhimmel. Von besonderem Interesse sind dabei jene „Wandelsterne", die nicht nur durch ihre Helligkeit auffallen (und auch ihrer Ausdehnung, wenn man genau hinschaut, denn in einem gar nicht mal teuren Fernrohr ist z.B. der Jupiter schon eine beträchtliche Scheibe und kein Punkt mehr), sondern vor allem dadurch, dass sie ihre Lage relativ zu den anderen Sternen (die „fix" sind) ständig ändern (eben „herumwandeln"). Es verwundert daher nicht, dass schon in frühesten Zeiten die Bewegung dieser Planeten eine starke Triebfeder für die Mathematik, damals vor allem die Geometrie, war. Ptolemäus (90 - 160 n. Chr.) beschrieb, gestützt auf den Beobachtungen von Hipparch von Nicäa (190 - 125 v. Chr.), die Bewegung durch seine „Epizykeltheorie", nach der die Erde im Mittelpunkt des Universums steht, Sonne und Mond sich auf einfachen Kreisbahnen um die Erde bewegen, die (bis dahin bekannten) fünf Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn dagegen sich auf Kreisen (Epizykeln) bewegen, deren Mittelpunkte sich ihrerseits auf einer Kreisbahn (der so genannten Deferente) um die Erde bewegen. Es hat dann lange gedauert bis N. Kopernikus (1473 - 1543) das geozentrische Weltbild zu Fall brachte und statt dessen die Sonne in den Mittelpunkt des Weltalls stellte und für die Planeten — darunter nun die Erde — eine Kreisbewegung um die Sonne postulierte (und dabei den Radius der Erde zwischen dem der Venus und des Mars' positionierte). Schließlich war es J. Kepler (1571 - 1630), der, gestützt auf das genaue Beobachtungsmaterial von T. Brahe (1546 - 1601), und dessen Nachfolger er an der kaiserlichen Sternwarte von Prag wurde, auch die Vorstellung der Antike, dass sich die Planeten auf dem Ideal eines Kreises bewegen müssen, fallen ließ und nur die bloßen Beobachtungsdaten (insbesondere über die Bewegung des Mars', die deutlich von der postulierten Kreisbahn abwich) zum Anlass seiner drei berühmten Gesetze nahm:

<u>1. Keplersches Gesetz.</u> Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, welche in einem

der beiden Brennpunkte steht.

2. Keplersches Gesetz. Die von der Sonne zum Planeten führende Strecke überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).

3. Keplersches Gesetz. Das Verhältnis des Quadrates der Umlaufzeit zum Kubus der großen Halbachse ist für alle Planetenbahnen konstant.

Die Bedeutung dieser Gesetze für die Entdeckung von Newtons Bewegungsgesetz ist vermutlich kaum zu überschätzen. Sind diese Keplerschen Gesetze noch rein geometrischer Natur, so war es also J. Newton, der diese Bewegung, die wir, wenn wir die Sonne in den Ursprung eines Koordinatensystems legen, als eine Kurve $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beschreiben wollen, als Lösungskurve einer Differentialgleichung

$$\ddot{x} = G(x)$$

beschrieb. Es ist eine weitere große Leistung Newtons, das Vektorfeld $G: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ aus den Keplerschen Gesetzen zu „rekonstruieren". Ausnahmsweise werden wir in diesem Paragraphen also so vorgehen, dass wir uns auf den Standpunkt stellen, bereits präzise Informationen über das dynamische System $\varphi = (\varphi^t)$ zu $\ddot{x} = G(x)$ zu haben, und daraus dann das Vektorfeld G bestimmen werden. Es versteht sich dabei, dass wir die Keplerschen Gesetze so verstehen – und Newton hat das sicher auch so getan – dass nicht nur die fünf Bahnen der damals bekannten Planeten diesen Gesetzen gehorchen, sondern auch ~~alle~~ die Bahnen von allen Planeten, die eventuell noch entdeckt werden, d.h. auch jene Bahnen des dynamischen Systems, die nur (zufällig) nicht „benützt" werden (obwohl Kepler scheinbar nicht an die Existenz weiterer Planeten dachte, sondern in der Anzahl 5 an einen Zusammenhang mit den fünf Platonischen Körpern glaubte). Meistens ist es ja eher die Aufgabe aus dem Vektorfeld G den Fluss φ zu bestimmen.

Die Grundvorstellung Newtons war also die, dass die Sonne ein *Gravitationsfeld* $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ erzeugt, einzig und allein durch ihre Anwesenheit. Hält man dann einen Körper in das Feld, so wirkt dort auf ihn die Kraft ~~an~~ $F = m_s G$, wobei $m_s > 0$ eine Eigenschaft des Körpers beschreibt, die sozusagen auf das Vorhandensein auf eines solches Gravitationsfeld anspricht. Man spricht von der *schweren Masse* dieses Körpers, die zunächst von der Masse, die im Newtonschen Bewegungsgesetz vorkommt, zu unterscheiden ist. Man spricht nämlich bei $m = m_t > 0$, welches die Bewegung x eines Körpers unter Einwirken der Kraft F via

$$m_t \ddot{x} = F$$

beeinflusst, von der *trägen Masse*. Denn liegt die

Einsicht zu Grunde, dass bei gleicher Kraft der Körper sich um so weniger bewegt, je größer seine Masse m_t ist (denn F/m_t wird ja dann kleiner). Je größer m_t, desto träger der Körper. Schiebt man etwa einen Lastwagen mit der gleichen Kraft an wie einen Kleinwagen, so verdeutlicht die resultierende Bewegung das Beschriebene. Die träge Masse eines Körpers ist also unmittelbar mit der Bewegung desselben verbunden, während die schwere Masse ursprünglich nichts mit Bewegung zu tun hat, sondern nur dann ins Spiel kommt, wenn Gravitationsfelder vorliegen, d.h. andere schwere Massen vorhanden sind. Hat also eine vorhandene Kraft eine andere Ursache wie z.B. der Feder bei der Schwingungsgleichung im vorigen Paragraphen (oder der Kraft, die auf eine Ladung in einem elektrischen Feld wirkt), so hat die schwere Masse des Teilchens keinen Einfluss auf seine Bewegung, die träge Masse sehr wohl. In diesem Sinne wird also das gerichtete Gravitations~~ge~~feld G nur von der schweren Masse der Sonne abhängen und dann die Bewegungsgleichung für die Planeten zu

$$m_t \ddot{x} = m_s G$$

werden.

Übrigens nehmen wir in dieser ganzen Diskussion an, dass die Sonne selbst sich nicht bewegt, was nicht ganz richtig ist, weil die schweren Massen der Planeten auch ein Gravitationsfeld erzeugen werden, auf das die Sonne wegen ihrer großen trägen Masse aber kaum reagieren wird.

Nun ist es ein experimenteller Fakt, dass diese beiden Eigenschaften der Materie in einem immer gleichen Verhältnis zueinander stehen, $m_t = \lambda m_s$ (mit $\lambda > 0$). Nach einer Zeitreskalierung $t = \sqrt{\lambda}\,\tau$, welches also der Festlegung einer anderen Zeiteinheit gleichkommt und zu der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = (\sqrt{\lambda})^2\,\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \cdot \frac{m_s}{m_t}\,G = G$$

führt, dürfen wir deshalb $m_s = m_t$ annehmen. Hat man z.B. einmal erkannt, dass die Ursache, die einen Apfel vom Ast zum Boden fallen lässt, die gleiche ist, die die Planeten auf ihren Bahnen hält, so lässt sich das daran ablesen, dass alle Körper — ob Apfel oder Kirsche — gleich zu Boden fallen. Ähnliches gilt für die Pendelbewegung, die wir am Ende des letzten Paragraphen diskutiert haben. Dort haben wir nämlich in der Bewegungsgleichung „die Masse herausgekürzt", wobei es sich streng genommen einmal um träge und einmal um schwere Masse gehandelt hat. Dass also alle Körper an einem Pendel an der Erdoberfläche gleich pendeln, ist eine Bestätigung dafür, dass die beiden Masseneigenschaften zusammenfallen. Nachdem wir uns also einige Mühe gegeben haben, zwischen träger und schwerer Masse zu unterscheiden, wollen wir nun doch wieder schlicht die eine reelle Zahl $m > 0$ verwenden, um die Masse des Körpers (schlechthin) zu bezeichnen. Der Leser möge jeweils für sich entscheiden, wenn er will, ob der dynamische Aspekt oder der Gravitationsaspekt der Masse vorliegt.

Wir sind also da angelangt, dass wir für die Planetenbewegung um die Sonne die Gleichung

$$\ddot{x} = G(x),$$

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, verantwortlich machen; und zwar mit einem Feld $G: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, dass von der Sonne erzeugt wird und idealerweise immer und überall existiert ist, unabhängig davon, ob zum Zeitpunkt t am Ort x nun eine Masse sich aufhält oder nicht. (Über diese „Existenz" wollen wir hier nicht streiten, da man sie eh nur überprüfen kann, wenn man einen Körper in das Feld hineinhält. Ob das Feld auch vorher schon da war, ist also eine eher müßige Frage.) Es gilt nun die Vorschrift dieses Gravitationsfeldes G durch physikalische Annahmen, Symmetrieannahmen und schließlich auch Keplers Gesetze immer weiter einzuschränken, um schließlich nichts weniger zu erhalten, als das allgemeine Gravitationsgesetz, welches die Anziehung zwischen zwei Körpern nur auf Grund ihrer Massen beschreibt.

Die erste Bedingung an $G = (G^1, G^2, G^3)$, die wir hier beschreiben wollen, hat einen physikalischen Ursprung. Bewegt sich ein Körper in einem Kraftfeld $F = (F^1, F^2, F^3)$ entlang eines Weges $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, so spricht man von der Arbeit als dem Produkt von „Kraft mal Weg" (wobei man das infinitesimal lesen muss, wenn der Weg nicht geradlinig ist), also der Größe

$$W = \int_\gamma F\cdot dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\, dt \qquad (1a)$$

V

(kurz: $dx = \dot\gamma\, dt$), wobei wir also das Skalarprodukt (formal) hier auch mit „$\cdot$" (an Stelle von $\langle .,.\rangle$) bezeichnen. Genauer gesagt ist W die Arbeit, die im Kraftfeld F entlang des Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ von $p = \gamma(a)$ nach $q = \gamma(b)$ verrichtet wird. Man nennt nun ein Kraftfeld F konservativ, wenn die Arbeit W, die verrichtet werden muss, um einen Körper $p \in \mathbb{R}^3$ und $q \in \mathbb{R}^3$ zu bringen, unabhängig vom (stückweise glatten) Weg ist, den man zur Verbindung von p nach q wählt. Eine äquivalente und etwas einfacher zu Hand habende Bedingung an $F = (F^1, F^2, F^3)$ konservativ zu sein, ist die folgende: F muss Gradient einer Funktion $-V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sein (das Minuszeichen hat lediglich traditionelle Gründe):

$$F = -\operatorname{grad}(V) = -(D_1V, D_2V, D_3V) \qquad (1)$$

(wobei wir hier mit D_i die partielle Ableitung nach x^i bezeichnen, $D_i = \partial/\partial x^i$ $(i = 1,2,3)$). Dass diese Bedingung hinreichend ist, folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel, denn für einen beliebigen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ von $p = \gamma(a)$ nach $q = \gamma(b)$ gilt:

$$W = \int_\gamma F\cdot dx = -\int_a^b \langle \operatorname{grad}(V)(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\, dt$$

$$= -\int_a^b \frac{d}{dt}(V\circ\gamma)(t)\, dt = -V(\gamma(b)) + V(\gamma(a)) = V(p) - V(q),$$

also unabhängig davon, was γ „unterwegs macht". Die Bedingung ist auch notwendig, denn in einem konservativen Kraftfeld definiert man (nach Festlegung eines beliebigen Punktes $p \in \mathbb{R}^3$) das <u>Potential</u>, wie man ~~die~~ eine Funktion V mit Eigenschaft (1) auch nennt, durch

$$V(x) = -\int_{\gamma_x} F \cdot dx,$$

wobei $\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ ein beliebiger (stückweise glatter) Weg von $p = \gamma_x(0)$ nach $x = \gamma_x(1)$ ist. (Die Wahl von γ_x ist dabei wegen der Konservativität von F gleichgültig.) Die Konservativität des Kraftfeldes, die man auch so ausdrücken, dass alle <u>geschlossenen</u> Wegintegrale (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$) verschwinden,

$$\oint_\gamma F \cdot dx = 0,$$

liefert dann in der Tat, dass $-V$ eine Stammfunktion von F im Sinne von (1) ist.

Nun ist es für Newton wohl keine Frage gewesen, das Kraftfeld F, welches die Sonne auf einen Planeten der Masse m, also auch das Gravitationsfeld $G = F/m$, als konservativ anzusetzen, $F = -\mathrm{grad}(V)$ bzw. mit $\Phi := V/m$,

$$G = -\mathrm{grad}(\Phi),$$

$\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Das „drittelt" die Arbeit, das Feld G zu bestimmen bereits, denn an Statt von drei Funktionen G^1, G^2, G^3 braucht man nun nur noch eine Funktion Φ zu bestimmen. Es sei schließlich erwähnt, dass Φ offenbar durch G bis auf eine additive Konstante festgelegt ist; eine Freiheit, die wir also bei der Festlegung von Φ im Folgenden haben werden.

Der Ansatz eines konservativen Feldes hat aber auch einen wichtigen Effekt auf das dynamische System φ, welches zu $\ddot{x} = G(x)$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gehört. Transformieren wir dies wieder zu einer Gleichung 1. Ordnung auf dem Phasenraum $\Omega = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y) (bzw. $(x, \dot{x})$),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= G(x), \end{aligned}$$

so erhält man durch die Energie-Funktion $E : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + \Phi(x)$$

eine Bewegungsinvariante, wie wir gleich sehen werden. Wir wollen aber diesen Begriff der Bewegungsinvariante (oder einem so genannten 1. Integral) vorher allgemein für jedes dynamische System einführen.

(3.1) Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein (glattes) Vektorfeld. Man nennt eine Funktion $E : \Omega \to \mathbb{R}$ ein 1. Integral für das dynamische System (φ^t) zu der Gleichung $\dot{x} = f(x)$, wenn für alle $x \in \Omega$ und alle $t \in I(x) \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$E(\varphi^t(x)) = E(x) . \qquad (2)$$

Der Einfachheit halber nennen wir im Weiteren eine Funktion (oder auch Vektorfeld) glatt, wenn sie Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, also unendlich oft differenzierbar ist. Eine glatte Funktion $E: \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein 1. Integral für $\dot{x} = f(x)$, wenn die Richtungsableitung $D_f E$ von E bei x in Richtung $f(x)$ verschwindet, denn einerseits folgt aus (2) unmittelbar, dass

$$D_f E(x) := \langle \operatorname{grad} E(x), f(x) \rangle = \langle \operatorname{grad} E(x), \tfrac{d}{dt}\big|_0 \varphi^t(x) \rangle$$

$$= \tfrac{d}{dt}\big|_0 (E(\varphi^t(x)) = 0,$$

und umgekehrt folgt aus der Flusseigenschaft $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ auch für alle $x \in \Omega$ und $t \in I(x)$:

$$\tfrac{d}{dt} E(\varphi^t(x)) = \tfrac{d}{d\tau}\big|_{\tau=0} E(\varphi^\tau(\varphi^t(x))) = \langle \operatorname{grad} E(\varphi^t(x)), \tfrac{d}{d\tau}\big|_0 \varphi^\tau(\varphi^t(x)) \rangle$$

$$= \langle \operatorname{grad} E(y), f(y) \rangle = D_f E(y) = 0$$

mit $y = \varphi^t(x)$, wenn die Richtungsableitung von E in jedem Punkt verschwindet. Die Existenz eines 1. Integrals für den Fluss $\dot{x} = f(x)$ kann man als eine Art <u>Dimensionsreduktion</u> für die Untersuchung des dynamischen Systems von $\dot{x} = f(x)$ betrachten, denn für den Fall, dass E nicht konstant auf ganz Ω ist (eine konstante Funktion ist natürlich stets ein triviales 1. Integral), so zerlegen ~~wir~~ die Niveauflächen $E^{-1}(c) \subseteq \Omega$, $c \in \mathbb{R}$, Ω in disjunkte Teilmengen, von denen die meisten (in einem präzisen maßtheoretischen Sinne nach einem Satz von Sard) Hyperflächen sind, d.h. Untermannigfaltigkeiten einer Dimension kleiner als n. Man gelangt also hierdurch ein weiteres Mal auf den Weg, dynamische Systeme auch auf Mannigfaltigkeiten zu betrachten, denn weil der Fluss nun nach Definition des 1. Integrals auf jeder solchen Niveaufläche bleibt, würde man dann das dynamische System auf so einer Mannigfaltigkeit $M = E^{-1}(c)$ studieren, welche nur noch die Dimension $n-1$ hat.

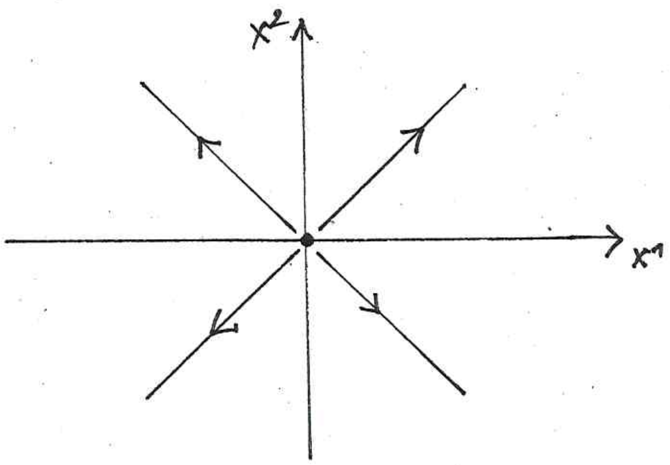
Im Grunde war dies lange die Vorgehensweise bei den Lösungsversuchen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Man glaubte, genügend viele 1. Integrale suchen zu müssen, um mit der Quadraturmethode schließlich die Lösungskurven explizit hinschreiben zu können. Wie optimistisch dieser Gedanke war, kann man bereits daran ermessen, dass im Allgemeinen der Fluss zu einer Gleichung $\dot{x} = f(x)$ überhaupt kein (nicht-triviales) 1. Integral haben wird. Man braucht z.B. nur eine Flusskurve zu haben,

$$\gamma(x) = \{\varphi^t(x) : t \in I(x)\} \subseteq \Omega,$$

$x \in \Omega$, die dicht in Ω liegt, also jedem Punkt in Ω beliebig nahe kommt, $\overline{\gamma(x)} = \Omega$. Ein 1.

Integral, welches wir wenigstens als stetig annehmen wollen, wäre dann nicht nur auf der Bahn $\varphi(x) \subseteq \Omega$, sondern auch auf deren Abschluss und damit auf ganz Ω konstant. ~~Hat~~ es reicht die Existenz eines einzigen Punktes $p \in \Omega$, der im Abschluss aller Bahnen liegt, wie es z. B. bei dem einfachen System $\dot{x} = x$ (auf $\mathbb{R}^n$) mit dem Ursprung $p = 0$ der Fall ist, um die Existenz eines nicht-trivialen 1. Integrals auszuschließen, denn $E(x) = E(p)$, für alle $x \in \Omega$, weil $p \in \overline{\varphi(x)}$ ist.

Oder $\mapsto$



Phasendiagramm zu
$\dot{x} = x$

Also: Die Existenz eines 1. Integrals ist als etwas Besonderes zu betrachten und das liegt bei der Bewegung in einem konservativen Kraftfeld vor:

(3.2) Satz (Energieerhaltung). Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\Omega = Q \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $G : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\varphi = (\varphi^t)$ der Fluss zu der Gleichung $\ddot{x} = G(x)$ auf Ω. Ist $G = -\operatorname{grad}(\Phi)$ mit einer Funktion $\Phi : Q \to \mathbb{R}$, so ist die Funktion $E : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \Phi(x)$$

ein ~~1~~ 1. Integral für (φ^t).

<u>Beweis</u>: Das Vektorfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$, welches zu dem System 1. Ordnung von $\ddot{x} = G(x)$ gehört, ist durch $f(x,\dot{x}) = (\dot{x}, G(x))$ gegeben und daher ist die Richtungsableitung von E in Richtung von f gegeben durch

$$D_f E(x,\dot{x}) = \langle D_x E, \dot{x}\rangle + \langle D_{\dot{x}} E, G(x)\rangle = \langle D_x \Phi, \dot{x}\rangle + \langle \dot{x}, G\rangle$$

$$= \langle \dot{x}, \operatorname{grad}\Phi + G\rangle = 0$$

($\langle .,. \rangle$ das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$), denn G ist ja konservativ, $G = -\operatorname{grad}(\Phi)$.

$\boxtimes$

Als nächstes wollen wir eine reine Symmetrie-Überlegung heranziehen, um das Feld G bzw. das Potential Φ weiter einzuengen. Dieser Symmetriegedanke ist nun kein anderer als der, dass das ~~G~~ Gravitationsfeld der Sonne, welche wir als punktförmig im Ursprung unseres Koordinatensystems $\mathbb{R}^3$ des Raumes annehmen, <u>isotrop</u> ist in dem Sinne, dass keine Raumrichtung irgendwie ausgezeichnet, sondern das Feld vielmehr in alle Richtungen „gleich" ist. Um dies mathematisch zu präzisieren und dann für die Gestalt von G auszunützen, erinnern wir an die Transformationen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

des Raumes, die den Punkt $0=(0,0,0)$ festlassen und alle Abstände respektieren,

$$|A(x)-A(y)| = |x-y| \qquad (3)$$

(wobei $|x-y|$ den Abstand zwischen x und y bezeichnet), für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dies sind die sogenannten orthogonalen Transformationen, also insbesondere lineare Abbildungen, die wir deshalb durch reelle 3×3-Matrizen beschreiben können, $x \mapsto Ax$, $A \in \mathrm{Mat}(3;\mathbb{R})$. (Wir benützen für die Matrix und für die zugehörige Transformation denselben Buchstaben.) Die „Isometrie-Bedingung" wird dann zu der Gleichung

$$A^T \cdot A = \mathbb{1},$$

wo $A^T = (b_{ij})$ die zu $A = (a_{ij})$ transponierte Matrix bezeichnet, $b_{ij} = a_{ji}$ $(1 \le i,j \le 3)$, und $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist. Mit $GL(3;\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren Matrizen,

$$GL(3;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(3;\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

und mit $O(3)$ die Untergruppe der orthogonalen Matrizen,

$$O(3) = \{A \in GL(3;\mathbb{R}) : A^T A = \mathbb{1}\}.$$

Die Bewegungen des Raumes sind dann die Isometrien, die zu dem die Orientierung des Raumes bewahren und damit zusätzlich der Bedingung $\det A > 0$ genügen, also sogar $\det A = +1$ erfüllen,

$$SO(3) = \{A \in O(3) : \det A = 1\}.$$

Jedes Element $A \in SO(3)$ ist eine Drehung um eine Achse g um einen Winkel α. Es ist gerade eine Grundaussage des so genannten „Erlanger Programms" von Felix Klein, Symmetrieüberlegungen in der Geometrie durch den algebraischen Begriff der Gruppe zu beschreiben, genauer gesagt dadurch, dass die betrachteten symmetrischen Größen „invariant" unter der Operation der entsprechenden Symmetriegruppe bleiben. In unserem Fall ist das also das Vektorfeld $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, welches invariant unter der Bewegungsgruppe (oder speziellen orthogonalen Gruppe) $SO(3)$ in dem Sinne bleibt, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt:

$$G(Ax) = AG(x) \tag{4}$$

Ist nun $x \in \mathbb{R}^3$ von der Länge r, $r = |x|$, und $y \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger anderer Vektor der Länge r, so gibt es sicher eine Bewegung $A \in SO(3)$, die x nach y überführt, $y = Ax$. Dazu wähle man etwa die Achse $\mathbb{R}(x+y)$ und betrachte die Drehung um $\alpha = 180°$ um diese Achse, die offenbar x nach y transformiert. Man sagt, dass $SO(3)$ auf jeder Sphäre

$$S(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\},$$

$r > 0$, transitiv operiert. Diese Überlegung zeigt also, dass man das Vektorfeld G nur in einem Punkt der Sphäre $S(r)$ kennen muss, um es via (4) auf der ganzen Sphäre zu kennen. Nun operiert aber in gewisser Weise die Gruppe $SO(3)$ auf $S(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ noch reichhaltiger als nur transitiv, denn betrachtet man wieder einen festen Punkt $x \in S(r)$, so gibt es durchaus Transformationen $A \in SO(3)$, die x festhalten und dennoch nicht die Identität $A = \mathbb{1}$ zu sein brauchen. Man nennt

$$\mathrm{Iso}(x) = \{A \in SO(3) : Ax = x\}$$

die Standgruppe von x (oder Isotropiegruppe) und es ist klar, dass unser Vektorfeld G, will es invariant unter $SO(3)$ sein, bereits in einem Punkt $x \in S(r)$ nicht beliebig sein kann, denn es muss invariant unter der Standgruppe sein,

$$G(x) = AG(x),$$

für alle $A \in \mathrm{Iso}(x)$. Man hat nun in der Standgruppe von x aber sicher alle Drehungen um die Achse $g = \mathbb{R}x$ (tatsächlich ist dies die volle Standgruppe) und daher kann man zwei beliebige Tangentialvektoren an $S(r)$ in x gleicher Länge mit einem Element der Standgruppe ineinander transformieren. Das zeigt nun, dass unser invariantes Vektorfeld G in jedem Punkt $x \neq 0$ keine Tangentialkomponente an $S(r)$, $r = |x|$, haben kann in dem Sinne, dass diese verschwindet, $G^{tan}(x) = 0$. Damit muss $G(x)$ ein Vielfaches des Normalenvektors $N = x/|x|$ an $S(r)$ sein,

$$G(x) = \lambda(x) \frac{x}{|x|} \tag{5}$$

mit einer Funktion $\lambda : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Man nennt solche Felder Zentralfelder, weil sie zentral auf das Zentrum gerichtet sind (oder vom Zentrum her wegzeigen). Auch diese Überlegung reduziert also (wie bei den vorangehenden über konservative Kraftfelder) die Suche von drei Funktionen G^1, G^2, G^3 auf eine Funktion λ. Aber hier haben wir noch mehr! Wegen der Transitivität der Wirkung auf $S(r)$ schließen wir ~~???~~ nämlich zu dem, dass wegen (4) $\lambda(Ax) = \lambda(x)$ folgt, also λ nur eine Funktion des Radius ist,

$$\lambda(x) = \varphi(|x|),$$

wo $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ nur noch eine Funktion in einer Veränderlichen ist. Wir sind also mit unseren Symmetrie-Überlegungen dahin gelangt, dass ~~das~~ das gesuchte Vektorfeld $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ von der Form

$$G(x) = \varphi(|x|) \frac{x}{|x|} \tag{6}$$

ist. Mehr können wir nun nicht mehr aus (4) ermitteln, denn Bedingung (4) ist sogar äquivalent zu (6). Ein Vektorfeld G, welches die Form von (6) (mit einer Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$) hat, ist nämlich in der Tat invariant unter $SO(3)$ (sogar unter $O(3)$), denn aus $|Ax| = |x|$ für alle $A \in SO(3)$ folgt

$$G(Ax) = \psi(|Ax|)\frac{Ax}{|Ax|} = A\left(\psi(|x|)\frac{x}{|x|}\right) = AG(x).$$

Man nennt solche Felder, die (4) bzw. (6) erfüllen, rotationssymmetrisch. Sie sind also insbesondere zentral und sie sind auch notwendig konservativ, denn ist $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $-\psi$, also etwa

$$\varphi(r) = -\int_1^r \psi(s)\,ds,$$

so gilt wegen $\operatorname{grad}(|x|) = \frac{x}{|x|}$, dass für $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \varphi(|x|),$$

Φ tatsächlich ein Potential für G ist:

$$-\operatorname{grad}\Phi(x) = -\varphi'(|x|)\frac{x}{|x|} = \psi(|x|)\frac{x}{|x|} = G(x).$$

(Wir hätten demnach die vorherige Diskussion über konservative Kraftfelder ersparen können, denn die Symmetrieannahme an das Feld zieht jene Eigenschaft automatisch nach sich, wie wir gerade gesehen haben. Es erschien mir aber wichtig, den innigen Zusammenhang zwischen einem konservativen Kraftfeld und der Bewegungsinvarianz der zugeordneten Energie-Funktion zu betonen.) Nun sage niemand, dass diese Symmetrie-Überlegung nicht viel gebracht hat. Sie reduziert die Sache nach drei Funktionen G^1, G^2, G^3, die jeweils von drei reellen Veränderlichen abhängen, auf lediglich eine Funktion φ, die nur noch von einer (positiven) reellen Veränderlichen abhängt.

In Anlehnung an die Überlegungen zu dem Energie-Integral für konservative Kraftfelder verwundert es jetzt vielleicht nicht, dass es für rotationssymmetrische Felder, sogar für die allgemeinere Klasse der Zentralfelder, weitere 1. Integrale (nämlich wie wir gleich sehen werden: 3 weitere 1. Integrale) für die Bewegung geben wird. Dazu erinnern wir zunächst an das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$, welches durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix}$$

für $x = (x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$ gegeben ist. Es hat die Eigenschaft, dass $x \times y = 0$ genau dann ist, wenn die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig sind und der Vektor $x \times y$ senkrecht sowohl auf x als auch auf y steht.

Betrachten wir nun wieder den Fluss, der zu der Gleichung $\ddot{x} = G(x)$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bzw. auf dem zugehörigen Phasenraum $\Omega = (\mathbb{R}^3 \times \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ assoziiert ist, so nennt man die Abbildung $L : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $L = (L^1, L^2, L^3)$,

$$L(x, \dot{x}) = x \times \dot{x}$$

den Drehimpuls (bzgl. $x = 0$). Es gilt nun:

(3.3) Satz (Drehimpulserhaltung). Sei $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\Omega = Q \times \mathbb{R}^3$, $G : Q \to \mathbb{R}^3$ ein Zentralfeld und $\varphi = (\varphi^t)$ der Fluss zur Gleichung $\ddot{x} = G(x)$ auf Ω. Dann gilt für den Drehimpuls L, dass er unter dem Fluss invariant bleibt.

Beweis. Weil G zentral ist, ist $G(x) = \lambda(x)\, x$ für eine Funktion $\lambda : Q \to \mathbb{R}$. Ist nun $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega$ eine Lösungskurve der zugeordneten Gleichung 1. Ordnung auf Ω, so ist

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (x \times \dot{x})(t) = \dot{x} \times \dot{x} + x \times \ddot{x} = 0,$$

denn $\dot{x} \times \dot{x} = 0$ sowieso und $x \times \ddot{x} = 0$, weil $\ddot{x} = G(x)$ ein Vielfaches von x ist.

$\square$

Wir wollen nun einige Konsequenzen für den Fluss beschreiben, die dieses Vorhandensein von drei weiteren Bewegungsinvarianten, nämlich die drei Komponenten des Drehimpulses, implizieren. Eine erste, grobe Parameterzählung sollte uns freilich schon einige Hoffnung geben, dass wir den Fluss weitgehend explizit beschreiben können — auch ohne weitere Spezifizierung des Feldes G — denn die Dimension des Phasenraums $\Omega = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ ist 6-dimensional und wir haben bereits vier Bewegungsinvarianten E, L^1, L^2, L^3 gefunden. „Generisch" wird sich also die Bewegung auf einer 2-dimensionalen Fläche, nämlich dem Durchschnitt der Niveauflächen von E und L abspielen, von dem man annehmen kann, dass er ~~sie~~ eine um vier verminderte Dimension hat, wenn E, L^1, L^2, L^3 wirklich unabhängig sind (etwa in dem Sinne, dass ihre Gradienten nicht überall linear abhängig sind). Die Bewegung auf dieser verbleibenden Fläche mag man vielleicht mit zwei Quadraturen in den Griff bekommen oder gibt es vielleicht sogar eine 5. Bewegungsinvariante?

Betrachten wir zunächst den Fall $L = 0$. Der Wert $L = 0 \in \mathbb{R}^3$ ist der einzige kritische Wert von $L : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Hier ist das Niveau nicht 3-dimensional (wie bei den nicht-kritischen Werten nach dem impliziten Funktionensatz), sondern 4-dimensional, denn für $(x_0, \dot{x}_0) \in L^{-1}(0)$ ist $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beliebig und $\dot{x}_0$ muss ein Vielfaches von x_0 sein, $\dot{x}_0 = \lambda x_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass dann die Bewegung die ganze Zeit ihrer Existenz auf der Geraden $\mathbb{R}x_0$ stattfindet. Drehen wir, wenn nötig, das Koordinatensystem, so dürfen wir nämlich annehmen, dass $x_0^2 = x_0^3 = \dot{x}_0^2 = \dot{x}_0^3 = 0$ und $x_0^1 > 0$ ist. Betrachtet man jetzt die Lösung $t \mapsto r(t)$ der Gleichung

$$\ddot{r} = -\varphi'(r) \tag{7}$$

zum Anfangswert $(r_0, \dot{r}_0) = (x_0^1, \dot{x}_0^1)$ auf $\mathbb{R}_+$, so ist $t \mapsto (r(t), 0, 0)$ Lösung von

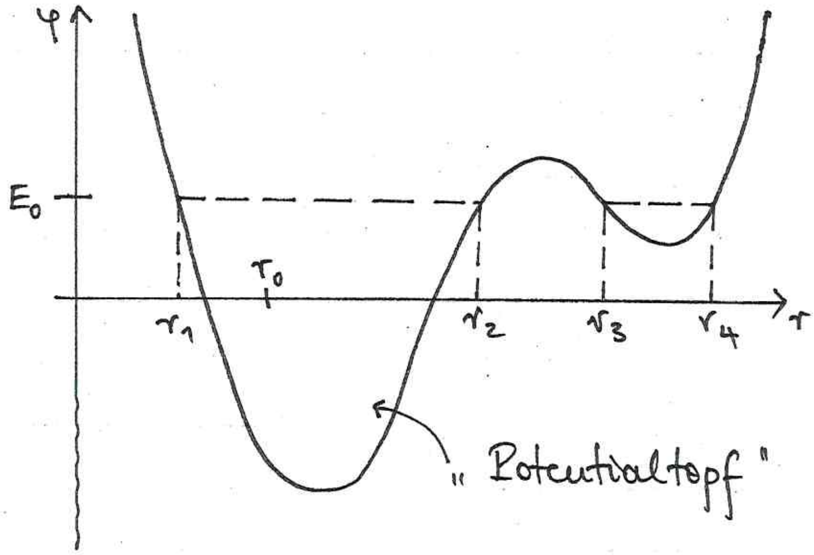
$$\ddot{x} = G(x) = -\varphi'(|x|)\frac{x}{|x|}$$

zum Anfangswert $(x_0, \dot{x}_0)$ und bleibt damit auf der x^1-Achse. Man hat damit das ursprüngliche Problem in sechs Dimensionen tatsächlich auf zwei Dimensionen reduziert, allerdings ohne hier die Bewegungsinvariante „Energie" zu benutzen. Manchmal reduziert die Existenz eines Integrals die Dimension also mehr als man zunächst erwartet. Die Energiefunktion hat man also noch und sie ist auf dem nun nur noch 2-dimensionalen Phasenraum $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ durch

$$E(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \varphi(r)$$

gegeben. Ein Blick auf den Graphen von φ liefert nun eine qualitative Beschreibung des Flusses. Sieht der Graph von φ etwa wie in der folgenden Abbildung aus und ist $E_0 = E(r_0, \dot{r}_0)$ die Anfangsenergie, so schließt man aus der Konstanz von E unter dem Fluss und der Tatsache, dass der Bewegungsanteil $\frac{1}{2}\dot{r}^2$ von E (die so genannte kinetische Energie der Bewegung) nicht negativ ist, sofort, dass die

Bewegung nur in den Intervallen $[r_1, r_2]$ bzw. $[r_3, r_4]$ stattfinden kann.



Ist etwa $r_0 \in (r_1, r_2)$, so kann man weiter schreiben, dass $t \mapsto r(t)$ zunächst monoton wächst oder fällt, je nachdem ob $\dot r_0 > 0$ oder $\dot r_0 < 0$ ist (der Fall $\dot r_0 = 0$ ist ausgeschlossen, weil $\varphi(r_0) < E_0$ und damit $\dot r_0^2 \neq 0$ ist). Das passiert so lange, bis $r(t) = r_2$ bzw. $r(t) = r_1$ ist, denn vorher kann $t \mapsto r(t)$ nicht umkehren, weil dies $\dot r(t) = 0$ an dieser Stelle nach sich ziehen würde, was aber nur bei $r(t) = r_1$ oder $r(t) = r_2$ geschieht, weil nur dort $E_0 = \varphi(r)$ ist. Auf diese Weise ist klar, dass die Bewegung also periodisch zwischen r_1 und r_2 regelrecht (i.a. unharmonisch) hin und her schwingt mit einer Halbperiode von

$$T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E_0 - V(r))}},$$

denn $\dot r^2 = 2E_0 - \varphi(r)$. Wir setzen hier mal voraus, dass $\varphi'(r_1) < 0$ und $\varphi'(r_2) > 0$ ist. Dann ist nämlich das Integral tatsächlich endlich (vgl. Übungsaufgabe 4, Blatt 2). Die Bewegung bei den kritischen Potentialniveaus $c \in \mathbb{R}$, d.h. wo $\varphi'(x) = 0$ für ein $x \in \varphi^{-1}(c)$ muss extra diskutiert werden. Wäre etwa in unserem Beispiel $\varphi'(r_2) = 0$, so würde die Bahn mit Anfangslage $(r_0, \dot{r}_0)$, $r_0 \in (r_1, r_2)$, $\dot{r}_0 > 0$, monoton wachsend in die (instabile) Gleichgewichtslage r_2 für $t \to \infty$ konvergieren, $r(t) \nearrow r_2$. Man vergleiche auch die Diskussion des Pendels am Ende des letzten Paragraphen für das Energieniveau $c = +1$. In den strikten lokalen Minima von φ ist die Situation offenbar besonders einfach. Dort hat man eine *stabile* Gleichgewichtslage, d.h., ist die Anfangssituation $(r, \dot{r})$ nahe bei der der Gleichgewichtslage $(r_0, 0)$, so bleibt die Bahn für die gesamte Zeit ihrer Existenz in der Nähe derselben. Der Begriff der Stabilität von Gleichgewichtslagen wird bald systematisch studiert.

Man spricht bei der Diskussion des dynamischen Systems zu (7) auch vom *Potentialtopf* (der Summand $x \mapsto \Phi(|x|)$ in der Energie eines konservativen Systems $\ddot{x} = -\operatorname{grad}\Phi(x)$, $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \Phi(|x|)$, heißt traditionell die *potentielle Energie*), der durch das Potential φ gegeben ist und aus dem r nicht entweichen kann. Klar ist aber auch, dass die Bewegung (sogar in endlicher Zeit) nach Unendlich entweichen kann, wenn $\varphi(r)$ nicht gegen $+\infty$ für $r \to \infty$ geht (und $(r_0, \dot{r}_0)$ entsprechend sind). Ähnliches gilt für die *Potentialbarriere* bei $r = 0$. Die Bewegung im Zentralfeld mit Drehimpuls $L = 0$ (bei weitgehend beliebigen φ) ist damit geklärt.

Sei nun der Drehimpuls von Null verschieden, $L \neq 0$. Weil $x(t) \times \dot{x}(t) = L$ für alle $t \in I(x_0, \dot{x}_0)$, $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ ist, muss die Bewegung $t \mapsto x(t)$ für alle t senkrecht auf dem konstanten $L = L(x_0, \dot{x}_0)$ verlaufen, also in der Ebene, die durch

$$\operatorname{span}(x_0, \dot{x}_0) = \{ \lambda x_0 + \mu \dot{x}_0 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

gegeben ist. Die Invarianz (der Richtung) von L impliziert also, dass die ~~Bedingung~~ Bewegung, jetzt nicht mehr 1-dimensional, aber immerhin 2-dimensional verläuft. Wählen wir das Koordinatensystem so, dass $L = l e_3$ mit $l > 0$ ist, so bewegt sich also alles in der $x^1 x^2$-Ebene, $x^3(t) = 0$ für alle t, und von der Drehimpulserhaltung für diese ebene Bewegung, die wir jetzt durch mit $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ bezeichnen, bleibt immerhin noch die Erhaltung des Betrages von L,

$$l = x^1(t)\dot{x}^2(t) - x^2(t)\dot{x}^1(t) = \text{const.}$$

Für das System 1. Ordnung haben wir also immerhin noch einen 4-dimensionalen Phasenraum $\Omega = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ und zwei 1. Integrale, nämlich $E, l : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \varphi(|x|), \quad l(x, \dot{x}) = x^1 \dot{x}^2 - x^2 \dot{x}^1.$$

Es ist nun naheliegend das System auf Polarkoordinaten (r,θ) zu transformieren. Wir betrachten also nun die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\Psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

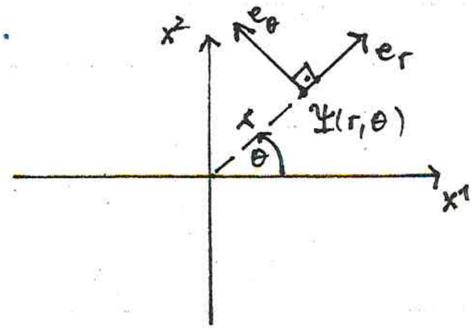
welche, ähnlich wie bei unserer Diskussion des nicht-linearen Pendels im letzten Paragraphen, zwar kein Diffeomorphismus, aber immerhin noch eine Überlagerung ist, so dass man jede Kurve $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ liften kann, d.h. es gibt eine Kurve $t \mapsto (r(t), \theta(t))$, so dass

$$x(t) = \Psi(r(t), \theta(t))$$

ist. Erfüllt nun $t \mapsto x(t)$ die Gleichung $\ddot{x} = -\varphi'(|x|)\, x/|x|$, so wollen wir berechnen, welche Gleichung $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ genügt. Dazu bezeichnen wir mit

$$e_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta),$$
$$e_\theta(r,\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

den radialen und dazu (in positiver Richtung) senkrechten Einheitsvektor in $\Psi(r,\theta)$.



Bewegt sich nun (r,θ) mit $t \mapsto (r(t), \theta(t))$, so gilt für e_r bzw e_θ:

$$\dot{e}_r = (-\sin\theta\cdot\dot\theta, \cos\theta\cdot\dot\theta) = \dot\theta e_\theta$$
$$\dot{e}_\theta = (-\cos\theta\cdot\dot\theta, -\sin\theta\cdot\dot\theta) = -\dot\theta e_r .$$

Differentiation von $x = \Psi(r,\theta) = r e_r$ liefert nun, dass

$$\dot x = \dot r e_r + r\dot e_r = \dot r e_r + r\dot\theta e_\theta ,$$

insbesondere

$$|\dot x|^2 = \dot r^2 + (r\dot\theta)^2 \qquad (8)$$

ist, denn $(e_r,$ ~~und~~ $e_\theta)$ ~~sind~~ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Eine weitere Differentiation impliziert

$$\ddot x = \ddot r e_r + \dot r \dot e_r + \dot r\dot\theta e_\theta + r\ddot\theta e_\theta + r\dot\theta\dot e_\theta$$
$$= (\ddot r - r\dot\theta^2)e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)e_\theta .$$

Andererseits ist $G(x) = -\varphi'(|x|)\, x/|x| = -\varphi'(r)e_r$, so dass man durch Vergleich der Komponenten aus $\ddot x = G(x)$ das System

$$\ddot r = r\dot\theta^2 - \varphi'(r) \qquad (9a)$$
$$\ddot\theta = -\frac{2\dot r}{r}\dot\theta \qquad (9b)$$

erhält. Transformation der beiden 1. Integrale liefert weiter

$$\begin{aligned} l &= (r\cos\theta)(r\sin\theta)' - (r\sin\theta)(r\cos\theta)' \\ &= r\cos\theta\,(\dot r\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot\theta) \\ &\quad - r\sin\theta\,(\dot r\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot\theta) \\ &= r^2\dot\theta \end{aligned}$$

und mit (8)

$$E = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \varphi(r) = \frac{1}{2}\dot r^2 + \varphi(r) + \frac{1}{2}r^2\dot\theta^2.$$

Die Gleichung (9b) drückt nun nichts weiter aus, als die Invarianz des Drehimpulses, was wir bereits wissen, denn

$$\ddot\theta + \frac{2\dot r}{r}\dot\theta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta).$$

Wenn wir also $t \mapsto r(t)$ kennen, können wir anschließend mit der Quadratur $t \mapsto \theta(t)$ von $\dot\theta = \ell/r^2$ (d.h. die ~~Stammfunktion~~ Bestimmung der Stammfunktion von $\ell/r^2(t)$ mit $\theta(0) = \theta_0$) die Winkelbewegung ermitteln. Ersetzt man nun den Term $\dot\theta^2$ durch ℓ/r^2, so erhält man tatsächlich aus (9a) nur noch eine Gleichung in r, nämlich

$$\ddot r = -\varphi'(r) + \frac{\ell^2}{r^3} \tag{10}$$

mit dem Energieintegral

$$E(r,\dot r) = \frac{1}{2}\dot r^2 + \left(\varphi(r) + \frac{\ell^2}{2r^2}\right).$$

Setzt man noch $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\psi(r) = \varphi(r) + \frac{\ell^2}{2r^2},$$

(das so genannte *effektive Potential*), so können wir also

$$\ddot{r} = -\psi'(r)$$

schreiben, welches wir – wie wir längst wissen – mit einer weiteren Quadratur lösen können. In der Tat haben wir die Qualität der Lösung bereits für den Fall $L = 0$ diskutiert. Hier wird das Potential lediglich um den additiven Term $\ell^2/(2r^2)$ ergänzt (welcher natürlich für $\ell = 0$ wegfällt, so dass wir zusammen mit $\dot{\theta} = 0$ die Resultate für den Fall $L = 0$ als Spezialfall erhalten), was z.B. für eine Potentialbarriere bei $r = 0$ sorgt, wenn $\varphi(r)$ für $r \to 0$ nicht noch schneller gegen $-\infty$ geht als $\ell^2/(2r^2)$ gegen $+\infty$ strebt. (Wenn man so will, bewahrt dieser Term die Planeten, wenn sie nur Drehimpuls $L \neq 0$ haben, vor dem Sturz in die Sonne.) Es ist also das ganze dynamische System ohne weitere Spezifizierung des Potentials φ in dem Sinne „*vollständig integrabel*", dass man mit zwei Quadraturen (und der Parametertransformation 4) die Lösung explizit hinschreiben kann.

Bevor wir nun mit Hilfe der Keplerschen Gesetze das Potential endgültig festlegen, wollen wir sehen, ob nicht ein Teil dieser Gesetze bereits für beliebige rotationssymmetrische Gravitationsfelder gültig ist. Da fällt z.B. die

Implikation des 1. Gesetzes ins Auge, die ledigl
besagt, dass die Planetenbahnen eben sind, d
eine Ellipse ist eine ebene Figur. Wir haben d
nämlich bereits aus der Invarianz (der Richt
des Drehimpulses erkannt (und tatsächlich ī
diese Invarianz der Drehimpulsrichtung sog
äquivalent dazu, dass alle Bahnen eben sin
Wir wollen nun begründen, warum die Invar
des Betrages des Drehimpulses bereits das
2. Keplersche Gesetz impliziert (und sogar,
der Voraussetzung, dass die Bewegung eben
äquivalent dazu ist).

Betrachten wir also wieder eine Anfangskon
figuration $L \neq 0$. Nach Einführung von Polar
koordinaten (r, θ) für die ebene Bewegung, w
sen wir bereits, dass sich der Betrag l des
Drehimpulses durch $l = r^2\dot{\theta}$ ausdrückt. Da
nun $r^2(t) > 0$ für alle $t \in I(x_0, \dot{x}_0) =: I$ sch
man daraus, dass $t \mapsto \theta(t)$ monoton wa
send ist. (Der Ortsvektor x kehrt auf seiner
Bahn um 0 sozusagen nicht einfach irgendw
um ($\dot{\theta} = 0$).) Wegen $\dot{\theta} = l/r^2 > 0$ ist $t \mapsto \theta$
sogar ein Diffeomorphismus von I auf ein
deteš off. Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Wir können daher $t \mapsto$
als eine Parametertransformation für die Zeit
damit θ als neue unabhängige Variable b
trachten. Für die inverse Transformation $J \to$
$\theta \mapsto t(\theta)$ gilt dann natürlich

$$t'(\theta) = \frac{1}{\dot{\theta}(t(\theta))} = \frac{1}{l} r^2(t(\theta)),$$ (

wobei wir nun mit „'" die Differentiation nach θ bezeichnen. Notieren wir weiter $r(\theta) := r(t(\theta))$, so können wir nun die Fläche $A(t)$ berechnen, die der Ortsvektor $x(t) = \Psi(r(t), \theta(t))$ zwischen $t_0 = 0$ und t bei seinem Lauf um den Ursprung $(0,0)$ überstreicht. Die Transformationsregel für Mehrfachintegrale besagt nämlich (weil $\det(D\Psi)(r,\theta) = r$ und damit in der Physikernotation das Flächenelement $dx^1 dx^2 = r\,dr\,d\theta$ ist), dass diese Fläche durch

$$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \int_0^{r(\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2(\theta)\,d\theta,$$

also nach der Substitution $\theta = \theta(t)$ durch

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^t r^2(t)\,\dot{\theta}(t)\,dt$$

gegeben ist. Die „Flächengeschwindigkeit" $\dot{A}(t)$ ist also

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2(t)\,\dot{\theta}(t) = \frac{1}{2} \ell$$

und damit nach der Drehimpulserhaltung in der Tat konstant. Damit ist das 2. Keplersche Gesetz bereits aus der Bewegungsgleichung für ein beliebiges Zentralfeld nachgewiesen und kann also nicht mehr für die weitere Bestimmung des Gravitationsfeldes herangezogen werden. Zusammen mit der Implikation der ebenen Bewegung aus dem 1.

Keplerschen Gesetz ist es lediglich ein Ausdruck dessen, dass das Gravitationsfeld zentral sein muss. (Man beachte hier die Feinheit, dass unser Ansatz über die Isotropie des Gravitationsfeldes etwas mehr lieferte, nämlich dass das Feld auch konservativ ist und damit Energieerhaltung vorliegt.)

Es bleibt also das volle 1. Keplersche Gesetz und das quantitative 3. Keplersche Gesetz auszunützen. Wir legen das 1. Gesetz nun so streng aus, dass wir darunter verstehen, dass eine jede Ellipse (und nicht nur die sechs der Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn) als Lösungskurve von $\ddot{x} = G(x)$ vorkommt, die nur dadurch restringiert ist, dass einer ihrer beiden Brennpunkte in den Ursprung fällt. Insbesondere fallen also darunter alle Kreisbahnen um den Ursprung. Für diese fällt dann natürlich die große Halbachse mit dem Radius zusammen und wir wollen nun diese Kreisbahnen, gemeinsam mit der Information des 3. Keplergesetzes, dass das Quadrat der Umlaufzeit T proportional zur dritten Potenz des Radius R ist, $T^2 = \lambda R^3$, um die Form des Potentials φ, also das Gravitationsfeld G, zu bestimmen.

Nehmen wir also an, die Kreisbahn mit Radius $R > 0$ wäre eine Bahn des dynamischen Systems zu $\ddot{x} = g(x)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Es ist dann also in Polarkoordinaten $r(t) = R$, für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus mit der Drehimpulserhaltung

$r^2\dot\theta = \ell =$ const. folgt, dass sich der Planet auch
rss. gleichförmig kreislinig um die Sonne bewegt, $\dot\theta =$ const., sagen wir $\omega := \dot\theta = \ell/R^2 > 0$, also

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t.$$

Die Periodendauer T eines Umlaufes ist dann durch $\theta(T) - \theta(0) = 2\pi$, also durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

gegeben. Nun ist aber mit $\dot r = 0$ auch $\ddot r = 0$ und daher folgt aus der Bewegungsgleichung $\ddot r = -\varphi'(r) + \ell^2/r^3$ mit $\ell = R^2\omega = 2\pi R^2/T$, dass

$$0 = -\varphi'(R) + \frac{4\pi^2 R^4}{T^2 R^3} = -\varphi'(R) + \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (12)$$

ist.

An dieser Stelle bemerken wir, dass der Teil des 1. Keplerschen Gesetzes, der alle Kreisbahnen um den Ursprung als Lösungskurven postuliert und der Teil des 3. Gesetzes, der die Umlaufperioden T für diese Kreisbahnen nur als eine Funktion des Radius postuliert, $T = T(R)$ — zusammen mit der vorher bereits besprochenen Drehimpulserhaltung — auch die Konservativität des Kraftfeldes nach sich zieht. Denn für ein Zentralfeld

$$G(x) = \lambda(x)\frac{x}{|x|}$$

würde man den Term $-\varphi'(R)$ durch $\mu(R,\theta) :=$

⚠ Dass μ nicht von θ abhängt, ist wegen $\dot\theta = \text{const.}$ bereits vorher klar, aber μ könnte von der Lage der Ebene $\{L = 0\}$ abhängen!

$\lambda \circ \Psi(r,\theta)$ ersetzen müssen und Gleichung (11) würde implizieren, dass μ tatsächlich nicht von θ abhängt

$$\mu(R,\theta) = -\frac{4\pi^2 R}{T(R)^2},$$

und somit G sogar rotationssymmetrisch ist.

Jetzt benutzen wir das 3. Keplersche Gesetz für die Kreisbahnen in voller Schärfe. Es gilt also mit einer Konstanten $\lambda > 0$, dass

$$T^2 = \lambda R^3$$

ist, so dass wir aus (12) die Gleichung

$$\varphi'(R) = \frac{c}{R^2} \tag{13}$$

erhalten. Die Konstante c hängt dabei mit der Proportionalitätskonstante aus dem 3. Kepl gesetz über $c = 4\pi^2/\lambda$ oder, wenn wir statt T die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ benutzen, über

$$\omega^2 R^3 = c \tag{14}$$

zusammen. Das ist also das Newtonsche Gravitationsgesetz, welches für die Planetenbewegung um die Sonne herum die Gleichung

$$\ddot{x} = -c\frac{x}{|x|^3} \tag{15}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, die wir von

6 (der Masse) der Sonne abhängt, ansetzt.

7 Die Gleichung (13) integriert man zuerst durch ein Potential φ, für das man die Integrationskonstante dadurch normiert, dass man $\varphi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ verlangt, was dann zu

$$\varphi(r) = -\frac{c}{r} \qquad (16)$$

führt, wenn wir für den Radius wieder r schreiben (denn R war in der obigen Diskussion beliebig).

Versuchen wir nun, das ganze dynamische System zur Differentialgleichung (15) zu bestimmen. Nach einer Zeitskalierung $t = \sqrt{c}\cdot\tau$ dürfen wir $c = 1$ annehmen und erhalten so die Keplersche Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}$$

1- auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. In Polarkoordinaten erhalten wir dann mit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\psi(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}$$

das System

$$\ddot{r} = -\psi'(r), = -\frac{1}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3}$$

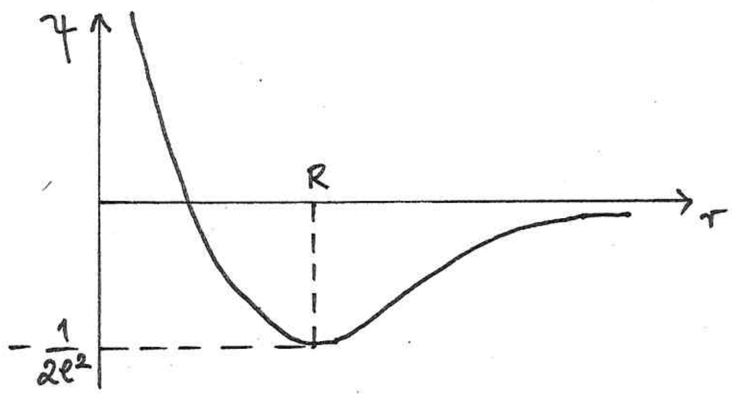
wobei $\ell = r^2\dot{\theta}$ der Drehimpuls der Bewegung ist.

Für $\ell = 0$, also der 1-dimensionalen Bewegung, ist damit der Fall klar. Ist

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) < 0,$$

so stürzt der Planet (nach endlicher Zeit) in die Sonne, denn $\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty$, ~~und~~ $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ und V wächst monoton. Für $E \geq 0$ wird er (nach endlicher Zeit) in die Sonne stürzen oder (nach unendlicher Zeit) ins Unendliche entweichen, je nachdem ob für die Anfangskonfiguration $(x_0, \dot{x}_0)$ mit $\dot{x}_0 = \lambda_0 x_0$ der Skalar ~~λ_0~~ $\lambda_0 < 0$ oder $\lambda_0 \geq 0$ ist.

Für $\ell \neq 0$ dagegen bewahrt die Barriere $\ell^2/2r^2$ die Planeten vor dem Exodus. Nun gilt nämlich $\lim_{r\to 0} V(r) = +\infty$, $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ mit einem lokalen (und auch globalen) Minimum bei $R = \ell^2$ (und Wert $V(R) = 1/2\ell^2$).



Das zeigt, dass die Keplersche Differentialgleichung in der Tat jede Kreisbahn um die Sonne zulässt: Man kann eben zu gegebenem $R > 0$ den Drehimpuls auf $\ell = \sqrt{R}$ und die Energie auf $E = -1/2R$ einstellen, wenn man eine Kreisbahn mit Radius R haben will, also etwa

$$x_0 = (R, 0, 0), \quad \dot{x}_0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{R}}, 0\right),$$

denn dann ist $\ell = R \cdot 1/\sqrt{R} = \sqrt{R}$ und ~~$E = |\dot{x}_0|^2/2 - 1/|x_0|$~~

$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}_0|^2 - \frac{1}{|x_0|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{2R}.$$

Ebenso sieht man, dass dies bei der Vorgabe von $\ell = |L|$ der minimale Energiewert ist, der vorkommen kann, also Energie und Impuls L der Bedingung

$$2E \cdot |L|^2 \geq -1$$

unterliegen. Schließlich sieht man, dass alle Bahnen mit

$$-\frac{1}{2|L|^2} \leq E < 0 \qquad (16)$$

beschränkt sind, während die mit $E \geq 0$ ins „Unendliche entweichen" (aber dafür „unendlich lange" brauchen). Wir wollen nun zeigen, dass alle Bahnen, die der Bedingung (16) genügen, Ellipsen ~~sind~~ mit einem Brennpunkt im Ursprung sind (und sogar, dass alle solchen Ellipsen auftreten).

Um das zu prüfen, ist es daher zunächst nötig, die Gleichung einer Ellipse möglichst in Polarkoordinaten (r, θ) zu beschreiben, die einen Brennpunkt im Ursprung hat, denn die Differentialgleichung für $t \mapsto r(t)$ und damit auch die für $\theta \mapsto r(\theta)$ — wir kennen ja die Parametertransformation $t \to \theta(t)$, $\theta \mapsto t(\theta)$ — ist uns nach dem bisherigen Studium sogar für beliebige rotationssymmetrische Felder bekannt.

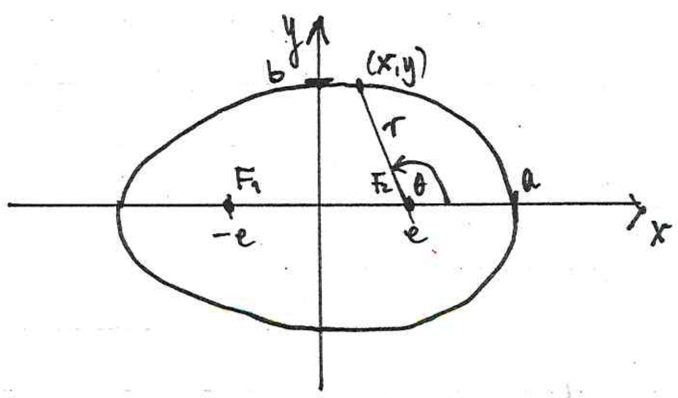
Nun ist eine Ellipse C bekanntlich durch alle die Punkte der eukl. Ebene E^2 gegeben, deren Summe der Abstände zu zwei festen Punkten F_1, F_2 konstant ist. Die Form der Ellipse wird daher durch den Abstand $2e$ dieser beiden Brennpunkte, $d(F_1,F_2)=2e$, sowie der Summenabstände $2a$ zu denselben beschrieben (wobei natürlich $e \geq 0$ und $a > e$ angenommen wird),

$$C = \{ P \in E^2 : d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \}.$$

Führen wir zunächst ein Koordinatensystem (x,y) ein, so dass F_1 die Koordinaten $(-e,0)$ und F_2 die Koordinaten $(e,0)$ hat, so gelangt man für die Koordinaten (x,y) der Punkte auf C zu der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17}$$

wobei nun a auch als die Länge der großen Halbachse auftritt und b die Länge der kleinen Halbachse bezeichnet, also $b^2 + e^2 = a^2$ (nach Pythagoras) ist.



Ellipse mit Halbachsen a, b

Führt man nun Polarkoordinaten (r,θ) mit Zentrum (sagen wir) in F_2 ein,

$$x-e = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

so erhält man die quadratische Gleichung

$$(1-\varepsilon^2\cos^2\theta)r^2 + (2\varepsilon a(1-\varepsilon^2)\cos\theta)r - (1-\varepsilon^2)^2a^2 = 0, \qquad (18)$$

wobei man $\varepsilon := e/a$ (also $0\le\varepsilon<1$) die Exzentrizität der Ellipse bezeichnet (mit ihrem Extremfall $\varepsilon=0$ des Kreises, wo die beiden Brennpunkte zum Kreismittelpunkt zusammenfallen). Von den beiden Lösungen dieser Gleichung ist eine negativ und eine positiv, denn ist $\lambda(r)=\alpha r^2+\beta r+\gamma$ die linke Seite von (18), so ist $\lambda(0)=\gamma=-(1-\varepsilon^2)^2a^2<0$ und $\lim_{r\to\pm\infty}\lambda(r)=+\infty$, von der, wegen $r>0$, nur die positive in Betracht kommt. Man erhält also

$$r = \frac{1}{2\alpha}\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\right)$$

und das rechnet man aus zu

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

wobei man hier $p = b^2/a$ bezeichnet und die Interpretation des ~~de~~ Krümmungsradius' in dem von F_2 entferntesten (oder nächsten) Punktes – den so genannten Scheitelpunkten der Ellipse – also auf der Verbindungsgeraden zwischen F_2 und F_1 liegend, hat (so genanntes „Latus rectum"). Schreibt man das in

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta)$$

um, so sieht man, dass die Abhängigkeit des i vertierten Radius $u := 1/r$ vom Winkel der Bewegu entspricht, die sich unter dem inhomogenen harm mischen Oszillator mit Frequenz $\omega = 1$ und äuße rem Feld $g = 1/p$ mit Anfangsphase $\theta_0 = 0$ und Amplitude $A = \varepsilon/p$ vollzieht (vgl. (3) in §2),

$$u(\theta) = \frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega\theta + \theta_0).$$

Das ist die Motivation dafür, dass wir nun die Differentialgleichung bestimmen wollen, welche di Kepler-Gleichung $\ddot{x} = -x/|x|^3$ für das Inverse der Radiusfunktion $u = 1/r$ in Abhängigkeit vo θ erfüllt.

Es ist also

$$\ddot{r} = -\psi'(r)$$

mit $\psi(r) = -1/r + \ell^2/2r^2$ (mit $\ell > 0$) in eine Gleichu für $u = 1/r$ in Abhängigkeit von θ, dass die Transformation (siehe (11))

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{r^2}, \quad t' = \frac{r^2}{\ell}$$

erfüllt, umzurechnen. Natürlich ist

$$-\psi'(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} = -u^2 + \ell^2 u^3 \qquad (19)$$

und andererseits mit der Kettenregel

$$u'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r(t(\theta))}\right) = -\frac{1}{r^2}\dot r t' = -\frac{1}{\ell}\dot r \qquad (20)$$

und daher

$$u'' = -\frac{1}{\ell}\ddot r t' = -\frac{1}{\ell^2} r^2 \ddot r = -\frac{1}{\ell^2 u^2}\ddot r .$$

Man erhält also in der Tat den inhomogenen harmonischen Oszillator (mit Frequenz $\omega = 1$ und äußerem Feld $g = 1/\ell^2$),

$$u'' = -\frac{1}{\ell^2 u^2}\left(-u^2 + \ell^2 u^3\right) = -u + \frac{1}{\ell^2},$$

was, wie wir aus §2 wissen, auf die Lösung

$$u(\theta) = \frac{1}{\ell^2} + A\cos(\theta + \theta_0) \qquad (21)$$

führt, wobei die Anfangsphase θ_0 und die Amplitude $A > 0$ von den Anfangsbedingungen $(x_0, \dot x_0)$ der Bewegung abhängt. Die Anfangsphase können wir nach einer eventuellen Änderung unseres Koordinatenwechsels $(r, \theta) \mapsto (x^1, x^2)$ (durch Drehung um θ_0) als $\theta_0 = 0$ annehmen und die Amplitude A wollen wir abschließend noch durch den Drehimpuls ℓ und die Energie E der Bahn ausdrücken. Es ist wegen (21) einerseits $u'(0) = \cancel{A}$ und andererseits die Energie wegen (20) durch

$$E = \frac{1}{2}\dot r^2 + V(r) = \frac{1}{2}(-\ell u')^2 + \left(-u + \frac{\ell^2}{2}u^2\right)$$

gegeben. Einsetzen von $\theta = 0$ liefert

$$\mapsto \quad E = \overset{0}{\cancel{\tfrac{1}{2}\ell^2 A^2}} + \left(-\left(\frac{1}{\ell^2}+A\right) + \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{1}{\ell^2}+A\right)^2\right),$$

also

$$A^2 = \frac{1}{\ell^4}\,(2E\ell^2+1).$$

Da $A > 0$ ist, schließen wir für die Amplitude

$$A = \frac{1}{\ell^2}\sqrt{1+2E\ell^2},$$

was also dazu führt, dass die geometrischen Dat
der Exzentrizität ε (mit $0 \le \varepsilon < 1$) und des Latu
rectum $p > 0$ durch

$$p = \ell^2, \quad \varepsilon = \sqrt{1+2E\ell^2}$$

gegeben sind.
Hieran sieht man nun auch, dass tatsäch
lich alle Ellipsenbahnen C mit einem Brenn
punkt im Ursprung als Lösungskurve vorkom
men. Nach einer Drehung im Raum um ein
Achse, die durch den Ursprung geht, kann m
nämlich annehmen, dass die Ellipsen mit ihren
Hauptachsen parallel zu den Koordinatenach
in $\mathbb{R}^2$ liegt und dann wird sie in Polarkoo
naten mit Zentrum im Brennpunkt nur noch
durch die beiden Parameter $0 \le \varepsilon < 1$ und p
charakterisiert. Man muss dann also die E
gie E und den Drehimpuls ℓ nur noch au

$$\ell = \sqrt{p} \quad \text{und} \quad E = -\frac{1-\varepsilon^2}{2p}$$

„einstellen", um diese Ellipse als Bahn zu erkennen. Es ist nicht schwer einzusehen, dass man dies durch eine entsprechende Wahl der Anfangsbedingung $(r_0, \dot{r}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ — mit (r_0, θ_0) natürlich auf C — erreichen kann (siehe Aufgabe 3, Blatt 4).

Die Diskussion zeigt uns schließlich auch, wie die unbeschränkten Bahnen mit $E \geq 0$ aussehen. Im Fall $E = 0$ ist $\varepsilon = 1$ und für $E > 0$ ist $\varepsilon > 1$, so dass die Bahnen auf den Punkten der Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

verläuft, was für $\varepsilon = 1$ eine Parabelbahn und für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbelbahn mit Brennpunkt im Ursprung bedeutet (Aufgabe 1, 2, Blatt 4).

Das 1. Keplersche Gesetz ist damit bestätigt. Prüfen wir zum Abschluss noch das 3. Keplergesetz für alle Ellipsenbahnen (für die Kreisbahnen hat es uns ja zur Ermittlung des Gravitationspotentials φ gedient). Nun ist ja nach dem (bereits bewiesenen) 2. Keplerschen Gesetz die Flächengeschwindigkeit $t \mapsto \dot{A}(t)$ konstant, nämlich $\dot{A} = \frac{1}{2}\ell$ und andererseits die Gesamtfläche der Ellipse durch $A(T) = \pi ab$ gegeben. (Denn die Ellipse mit Halbachsen a und b ist ~~ja~~ das Bild unter der linearen Transformation $x \mapsto ax$, $y \mapsto by$ der Einheitskreisscheibe. Die Determinante dieser Transformation ist aber offenbar ~~ab~~ ab und die Fläche der Einheitsscheibe ist π.). Auf diese ~~R~~ Weise bekommt man nun für die Umlaufzeit T

$$\frac{1}{2} \ell T = \int_0^T \dot{A}(t)\, dt = A(T) = \pi ab,$$

was mit $\ell^2 = p$ und $p = b^2/a$ zu

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\ell^2} a^2 b^2 = 4\pi^2 a^3$$

führt. Auch das 3. Keplersche Gesetz ist damit bewiesen.

§4. Gleichgewichtslagen

Wir haben am Ende von §2 bei der Diskussion des nicht-linearen Pendels und auch in §3 bei der Diskussion der ~~Keplergleichung~~ Kepler-Bewegung der Planeten um die Sonne regen Gebrauch von einer Koordinatentransformation gemacht, die uns im Pendelfall zu der Gleichung $\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$ auf $\mathbb{R}$ und im Kepler Fall zu $\ddot{r} = -r^{-2} + \ell^2 r^{-3}$ auf $\mathbb{R}_+$ führte. Wir wollen zu Beginn dieses Paragraphen systematischer untersuchen, wie sich die Differentialgleichung eines dynamischen Systems ändert, wenn man dieses einem Koordinatenwechsel unterzieht.

(4.1) Definition. Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete so wie $\psi = (\psi^t)$ ein dynamisches System auf D und $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf Ω. Wir sagen, dass (D, ψ) äquivalent zu (Ω, φ) ist, wenn es einen Diffeomorphismus $u: D \to \Omega$ gibt, so dass für alle $y \in D$ gilt: $I(u(y)) = I(y)$ und für alle $t \in I(y)$ ist