19. April 2001

# Dynamische Systeme

Vorlesung von Frank Loose im Sommersemester 2001, Universität Tübingen

---

Literatur: M. Hirsch and S. Smale: Differential equations, dynamical systems and linear algebra. Academic Press 1974

V.I. Arnold: Mathematical methods of classical mechanics. Springer 1989

C.L. Siegel and J.K. Moser: Lectures on celestial mechanics. Springer 1971

---

Inhalt:

## §1. Einführung

Eine Vorlesung über „Dynamische Systeme", bei der es also im weitesten Sinne um die Beschreibung von Bewegungsabläufen geht, darf wohl mit einigen Bemerkungen zu fundamentalen mathematischen Modellbildungen beginnen. Zunächst sind da die Begriffe von Raum und Zeit, denn was sonst bedeutet denn Bewegung, als dass ein Körper sich zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_1$ und $t_2$ an zwei verschiedenen Orten $x_1$ und $x_2$ befindet. Er hat sich von $x_1$ zur Zeit $t_1$ nach $x_2$ zur Zeit $t_2$ bewegt. Nun ist der mathematische Begriff, der die Zeit beschreibt, wie wir alle wissen, durch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gegeben. In vielen Fällen wird die Situation eben die sein, dass wir den Ort zu einem gewissen Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ – sagen wir $t_0 = 0$ – kennen und wissen möchten, wo er zu einem zukünftigen Zeitpunkt $t > 0$ sein wird (oder auch, wo ~~es~~ er zu einem vergangenen Zeitpunkt $t < 0$ war). Man legt also einen Ausgangspunkt $t_0 = 0$ und eine Zeiteinheit $t_1$ – sagen wir $t_1 = 1$ – fest, und alle anderen möglichen Zeitpunkte werden sodann durch genau eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ beschrieben. (Umgekehrt beschreibt jede reelle Zahl genau einen Zeitpunkt.)

Die reellen Zahlen tragen die mathematische Struktur eines Körpers, d.h. grob gesprochen, dass man in ihnen die vier Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ ausführen kann.

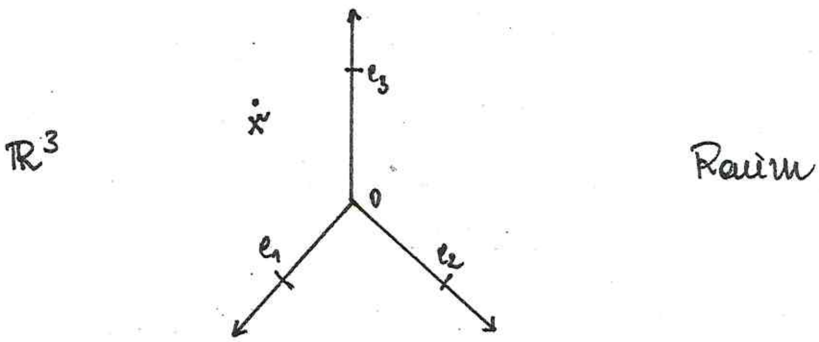
Ähnlich verhält es sich mit der mathematischen Beschreibung des Raumes. Der mathematische Begriff, der den uns umgebenden Raum beschreibt, ist der des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ (oder allgemeiner des $\mathbb{R}^n$, wo $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist). Man legt nämlich auch hier einen Ausgangspunkt $x_0$ fest – sagen wir $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$ – und man legt drei (linear unabhängige) Richtungen $e_1, e_2, e_3$ fest – sagen wir $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ – und findet dann, dass jeder mögliche Ort durch genau ein 3-Tupel

$$x = (x^1, x^2, x^3) = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$

festgelegt ist. In dieser Darstellung haben wir bereits von der linearen $\mathbb{R}$-Struktur der 3-Tupel $\mathbb{R}^3$ Gebrauch gemacht, d.h. grob, dass man in $\mathbb{R}^3$ addieren und mit Skalaren (aus $\mathbb{R}$) multiplizieren kann,

$$x + y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \lambda x^3 \end{pmatrix},$$

wenn $x = (x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.




Damit sind Zeit und Raum also durch den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 3-Tupel $\mathbb{R}^3$ mathematisch beschrieben.

Es ist vielleicht hier eine gute Gelegenheit darauf hinzuweisen, dass diese Begriffsbildungen keineswegs selbstverständlich sind. Immerhin hat es auch ziemlich lange gedauert, bis wir sie in der heutigen Präzision hatten. So ist es zwar naheliegend beim Zeitmodell nach Festlegung einer Anfangslage $t_0 = 0$ und einer Maßeinheit $t_1 = 1$ die doppelte, dreifache, ... und auch die halbe Zeitspanne, usw., durch eine Zahl zu belegen, aber damit bekommt man bekanntlich nur auf den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Die „Auffüllung der Lücken" — schon den Griechen war freilich bekannt, dass es eine Zahl zwischen 1,4 und 1,5 geben muss, deren Quadrat 2 ist, diese aber nicht rational sein kann — erfordert aber so komplizierte Begriffsbildungen wie Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen, Cauchy-Folgen bzw. Intervallschachtelungen, um die rationalen

Zahlen zu vervollständigen und zu den reellen Zahlen zu gelangen.

Auch ist es erst Descartes zu verdanken, die Beschreibung des geometrischen Ortes eines Punktes im Raum durch ein algebraisches Tupel reeller Zahlen zu beschreiben. Die Konzepte der reellen Zahlen für die Zeit und die der reellen 3-Tupel für den Raum sind also bereits als bewundernswerte Leistungen der menschlichen Intelligenz zu betrachten.

evtl. sogar die Kraft als ? Grundgröße zulassen

Ebenso wenig selbstverständlich ist nun auch die Beschreibung der Bewegung durch eine Abbildung (oder eine Funktion oder Kurve)

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto x(t),$$

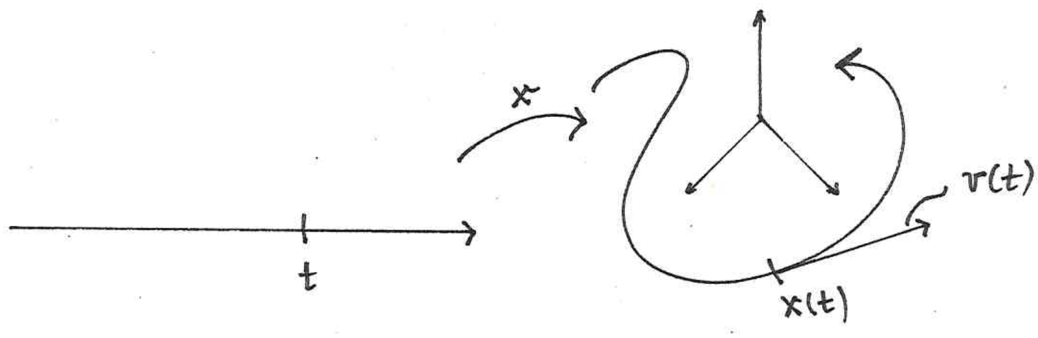
also der eindeutigen Zuordnung eines ~~Punktes~~ Ortes $x$ zu einem jeden Zeitpunkt $t$. Die Zeit wird also als die unabhängige Variable, der Ort als die abhängige Größe betrachtet. Assoziiert mit jeder solchen Bewegung ist zu jedem Zeitpunkt $t$ die augenblickliche Geschwindigkeit $v(t)$ als die (infinitesimale) Änderung des Ortes mit der Zeit in dem uns heute bekannten präzisen Sinne, dass $v(t)$ ein Grenzwert über die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{(t+h) - t}$$

für $h \to 0$ ist,

$$v(t) =: \dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

auch manchmal suggestiv mit $\frac{dx}{dt}(t)$ bezeichnet.




Ähnlich ist dann auch die *Beschleunigung* a der Bewegung zu jedem Zeitpunkt $t$ als die infinitesimale zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit assoziiert,

$$a(t) := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t).$$

Man beachte, dass wir für die weiteren Ableitungen $\ddot{x}(t)$, $x^{(N)}(t)$, usw. keine besonderen Namen mehr zur Verfügung haben und das hat seinen Grund! Zusammen mit der Entwicklung der *Differentialrechnung* von Leibniz und Newton ging nämlich die fundamentale Erkenntnis von Isaac Newton (1642-1727) einher, dass die Bewegung vieler Körper, wie sie uns in der Natur begegnet — insbesondere der Planetenbewegung um die Sonne herum, aber auch die Bewegung, die ein vom Baum herabfallender Apfel durchführt — einem einfachen *Bewegungsgesetz* folgt. Um dies formulieren zu können seien ~~mir~~ noch einige Bemerkungen zu den physikalischen Konzepten „Masse" und „Kraft" erlaubt. s.o.

Die Masse ist eine Eigenschaft, die einem jeden Stück Materie selbst zugeordnet wird. Sie wird durch eine positive reelle Zahl $m > 0$ beschrieben. Ein jedes Stück Materie – sagen wir ein Apfel – hat also eine Masse und die ist zu jeder Zeit und an jedem Ort gleich (gleichgültig also, ob man den Apfel auf der Erde oder etwa auf dem Mond in der Hand hält). Die Kraft, die auf ein Teilchen am Ort $x$ „wirkt", wird durch den mathematischen Begriff des Vektorfeldes $F$, also einer Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \longmapsto F(x)$$

modelliert. So wirkt z. B. auf den Apfel die Schwerkraft der Erde (oder des Mondes) und auf die Planeten die Anziehungskraft der Sonne.

Das so genannte zweite Newtonsche Gesetz (von dem das erste ein Spezialfall ~~und das dritte eine Folgerung~~ ist) besagt nun, dass die Bewegung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eines Körpers mit Masse $m > 0$, auf ~~das~~ den die Kraft $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wirkt, der Gleichung

$$F = ma$$

genügt, wobei $a = \ddot{x}$ die Beschleunigung der Bewegung ist. Wir wollen hier nicht versuchen ges.o.: Kraft ist ebenso wie Zeit und Raum „gegeben" die (träge) Masse ist per Def. die Prop.-Konstante aus $F \sim a$

nau zu erklären, was Masse und Kraft sind, sondern vielmehr auf das eingehen, was wir, jedenfalls von einem mathematischen Standpunkt aus, als so fundamental an diesem Gesetz empfinden. (Übrigens haben wir auch nicht den Versuch unternommen zu erklären, was Zeit und Raum „ist".) Fassen wir einfach den Quotienten $g := F/m$ als ein neues Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf und abstrahieren wir von seiner physikalischen Herkunft, so bleibt von dem Newtonschen Gesetz noch Erstaunliches über. Es besagt nämlich jetzt noch, dass die Beschleunigung $a = \ddot{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Bewegung in einem funktionalen Zusammenhang zu der Bewegung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ selbst steht,

$$\ddot{x} = g(x),$$

d.h., die Beschleunigung ist eine Funktion des Ortes. In unserer heutigen mathematischen Sprache bedeutet dies schlicht, dass also die Bewegungskurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ Lösungskurve einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung auf $\mathbb{R}^3$ ist. Grandios wird diese Aussage vor dem Hintergrund, dass damals gar keine Differentialrechnung existierte, sondern, im Gegenteil, dieses Gesetz geradezu den Startschuss für deren Entwicklung bedeutete. Diese Gleichung erlaubt es eben im Prinzip aus der Kenntnis des Ortes $x_0$ und der Geschwindigkeit $\dot{x}_0$ zu einem Zeitpunkt $t_0$ die gesamte Bahnkurve für alle zukünftigen und vergangenen Zeiten zu bestimmen. Die Beschreibung der Bewegung eines Körpers aus der Kenntnis der Kräfte, die auf den Körper wirken, ist der eigentliche Inhalt dessen, was ein Physiker unter „Dynamik" versteht.

Wir haben bereits erwähnt, dass zu jenen Zeiten die Differentialrechnung allenfalls in ihren Anfängen stand, also z.B. der Begriff der Ableitung noch nicht präzise definiert werden konnte. Geschweige denn hat man den „Existenz- und Eindeutigkeitssatz" für gewöhnliche Differentialgleichungen gekannt. Wohl aber wird Newton vollkommen klar gewesen sein, dass die Bewegung – sagen wir eines Pfeiles, der den gespannten Bogen des Schützen verlässt – vollständig durch die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit ~~(durch die Spannung des Bogens)~~ determiniert ist. Man kann dem Pfeil eben eine Anfangshöhe und eine Anfangsgeschwindigkeit (durch die Spannung des Bogens) geben, nicht aber mehr eine beliebige Anfangsbeschleunigung. Sie stellt sich vielmehr sozusagen automatisch ein.

Um nun die Newtonsche Differentialgleichung in eine Form zu bringen, wie wir sie später behandeln wollen, führen wir den Begriff des Phasenraumes ein. Unter der Phase der Bewegung $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ versteht man das Paar $(x(t), \dot{x}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Man betrachtet gewissermaßen Ort und Geschwindigkeit als unabhängig voneinander. Der Raum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ wird als Phasenraum bezeichnet. Setzen wir nun noch

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \longmapsto (y, g(x)),$$

so erfüllt die Kurve $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$z(t) = (x(t), \dot{x}(t)),$$

die Differentialgleichung

$$\dot{z} = f(z),$$

wenn $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Newtonschen Gleichung $\ddot{x} = g(x)$ genügt. Umgekehrt gilt: Ist $z = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ eine Lösung von $\dot{z} = f(z)$, so genügt $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Gleichung $\ddot{x} = g(x)$. Auf diese Weise hat man das Newtonsche System von drei skalaren Differentialgleichungen 2. Ordnung für $x^1, x^2, x^3$ in ein System von sechs Gleichungen 1. Ordnung für $(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3)$ überführt. Wir sind damit bei folgender Begriffsbildung angelangt:

(1.1) Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\Omega$. Dann heißt

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

die von $f$ induzierte gewöhnliche Differentialgleichung auf $\Omega$. Eine Funktion $x : I \to \Omega$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, heißt eine Lösungskurve von (1), wenn für alle $t \in I$ die Gleichheit

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

gilt.

Aus der Grundvorlesung „Analysis III" wissen Sie nun, dass es zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein Intervall $I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ gibt, wobei $t_-(x_0) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(x_0) \in (0, +\infty]$ ist, und eine stetig differenzierbare Kurve $x : I(x_0) \to \Omega$, die Lösung von (1) mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0$$

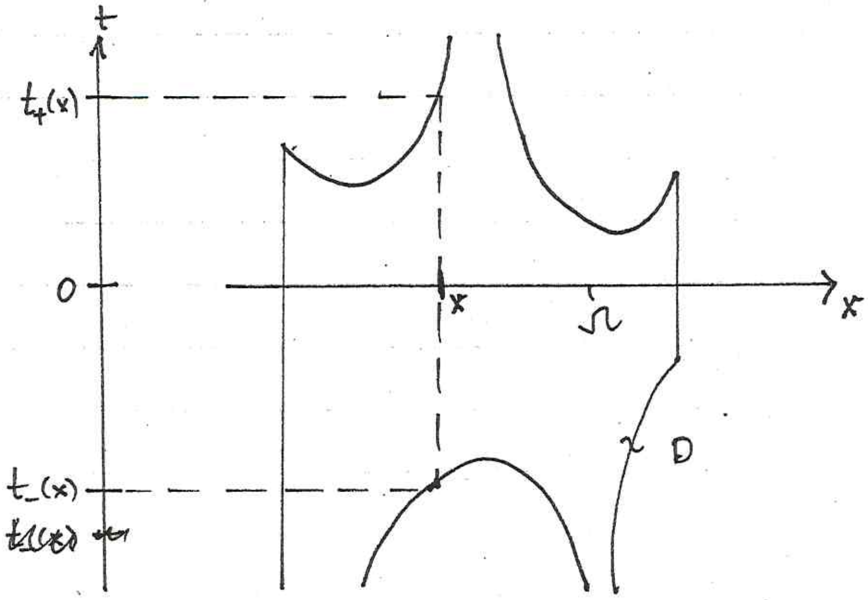
ist. Diese Kurve ist eindeutig und $I(x_0) \subseteq \mathbb{R}$ ist maximal in dem Sinne, dass es kein größeres Intervall $\tilde{I} \supsetneq I(x_0)$ gibt mit einer Lösung $\tilde{x} : \tilde{I} \to \Omega$ und $\tilde{x}(0) = x_0$. Dies ist der so genannte Existenz- und Eindeutigkeitssatz, den wir als bekannt annehmen wollen. Wir wollen auch die stetige und sogar differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten als bewiesen ansehen. Diese besagt erstens, dass die Menge

$$D = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \times I(x) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$$

ein Gebiet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, also offen und zusammenhängend ist, und dass die Gesamtheit der Lösungen, d.h. die Abbildung $\varphi : D \to \Omega$,

$$\varphi(x, t) =: \varphi^t(x),$$

die $(x,t)$ den Wert der Lösung zum Anfangswert $x$ zur Zeit $t$ zuordnet, auch stetig differenzierbar vom Anfangswert abhängt, also $\varphi : D \to \Omega$ eine $C^1$-Abbildung ist (d.h. alle partiellen Ableitungen von $\varphi$ existieren und sind stetig).




Später werden wir, indem wir den Buchstaben x sowohl als Koordinate für den Anfangswert als auch als Zeichen für die Lösungskurve überbelasten, „$x(0) = x$", doch wieder

$$x(t) = \varphi^t(x)$$

schreiben, wenn keine Konfusion (mehr) zu befürchten ist.

All dies wollen wir also voraussetzen bzw. wir nehmen es als gegeben an. Was wir auch nicht versuchen wollen — außer zu Beginn — weil es nämlich im allgemeinen gar nicht geht (in einem zu präzisierenden Sinne), ist, die Lösungskurve explizit und damit quantitativ zu bestimmen, d.h., wir wollen auch keine gewöhnliche Differentialgleichungen lösen. Es ist eben, wie wir sehen werden, oft schon schwer genug, auch nur *qualitativ* — das ist hier das Zauberwort — etwas über die Lösungskurve zu erfahren. Z.B. ist es oft gar nicht klar, für welche Anfangslagen $x \in \Omega$ das maximale Definitionsintervall $I(x) \subseteq \mathbb{R}$ denn die ganzen reellen Zahlen sind, $I(x) = \mathbb{R}$. Nehmen wir an, wir hätten z.B. das Kraftgesetz erkannt, nach welchem sich die Bewegung der Himmelskörper untereinander vollzieht, so ist es eben eine qualitative Frage, für welche Anfangskonfigurationen (d.h. also wieder Orte und Geschwindigkeiten der Körper) es zu einem Zusammenstoß kommen wird (oder wann sie aus einer „Explosion" stammen). Andere qualitative Fragen sind: Wann ist eine Bahn periodisch? Wann ist eine Bahn stabil?

Man nennt die Gesamtheit der Lösungskurven $\varphi : D \to \Omega$, wie wir sie oben beschrieben haben, das zu der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf $\Omega$ gehörende *dynamische System*. Man kann eben $\varphi$ auch als eine Abbildung von $\Omega$ in die Abbildungen von Intervallen nach $\Omega$ auffassen, die jedem $x \in \Omega$ seine Lösungskurve $x : I(x) \to \Omega$, seine „Dynamik" eben, zuordnet. Das Konzept des dynamischen Systems könnte man auch selbst an die Spitze der Theorie stellen. Um dies präzise einführen zu können, bemerken wir zunächst, dass nicht jede Abbildung $\varphi : D \to \Omega$, $D \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ mit $\Omega \times \{0\} \subseteq D$, als das dynamische System einer gewöhnlichen Differentialgleichung auftritt. Z.B. muss bereits das Gebiet $D \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ eine Gestalt derart haben, dass für jedes $x \in \Omega$

die offene Menge $I(x) \subseteq \mathbb{R}$, welche durch $\{x\} \times I(x) = (\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D$ gegeben ist, zusammenhängend sein muss, also ein offenes Intervall $I(x) = (t_-(x), t_+(x))$ mit $t_-(x) \in [-\infty, 0)$, $t_+(x) \in (0, \infty]$. Weiterhin muss für $x \in \Omega$ und $s \in I(x)$ gelten: ist $y = \varphi^s(x)$ und $I(y) = (t_-(y), t_+(y))$, so muss

$$t_-(y) = t_-(x) - s\,, \quad t_+(y) = t_+(x) - s$$

gelten (mit der Konvention, dass $-\infty - s = -\infty$ und $+\infty - s = +\infty$ ist). Schließlich muss dann auch

$$\varphi^t(y) = \varphi^{t+s}(x)$$

für alle $t \in I(y)$ gelten, denn beide Kurven $I(y) \to \Omega$, $t \mapsto \varphi^t(y)$ und $t \mapsto \varphi^{t+s}(x)$ lösen die gewöhnliche Diff.-gleichung $\dot{x} = f(x)$ zum Anfang $y$,

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(y) = f(\varphi^t(y)), \quad \varphi^0(y) = y\,;$$

$$\frac{d}{dt}\varphi^{t+s}(x) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=t+s}\varphi^\tau(x) = f(\varphi^\tau(x))\Big|_{\tau=t+s} = f(\varphi^{t+s}(x)),$$

$$\varphi^{0+s}(x) = \varphi^s(x) = y\,,$$

und sind nach der Eindeutigkeit der Lösung gleich. Wegen $y = \varphi^s(x)$ schreiben wir auch

$$\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s} \tag{2}$$

und nennen diese Verträglichkeitsbedingung auch die <u>Flusseigenschaft</u> des dynamischen Systems. Das dynamische System $\varphi$ selbst wird manchmal auch als <u>Fluss</u> zu $\dot{x}=f(x)$ bezeichnet und dann oft mit $\varphi=(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ notiert. Das rührt daher, dass beim Festhalten der Zeit $t$ die Abbildungen

$$\varphi^t:\Omega_t\longrightarrow\Omega_{-t},\quad x\longmapsto\varphi^t(x),$$

wobei

$$\Omega_t=\{x\in\Omega,\ t\in I(x)\},\quad t\in\mathbb{R},$$

ist, die Punkte $x\in\Omega_t$ mit $\varphi^t$ nach $\underset{\in}{\varphi^t(x)}^{\Omega_{-t}}$ „fließen". Es ist dabei $\Omega_0=\Omega$, $\varphi_0=\mathrm{id}$ und die Abbildungen $\varphi_t$ allesamt Diffeomorphismen, denn $\varphi^{-t}_{-t}:\Omega_{-t}\to\Omega_t$ ist ja ihr Inverses nach (2),

$$\varphi^t\circ\varphi^{-t}=\varphi^{-t}\circ\varphi^t=\varphi^{t-t}=\varphi^0=\mathrm{id}.$$

Man nennt den Fluss $\varphi=(\varphi^t)$ zu $\dot{x}=f(x)$ übrigens <u>global</u>, wenn das Definitionsgebiet $D$ ganz $\Omega\times\mathbb{R}$ ausmacht; eine besonders schöne Situation. In diesem Fall sind also die maximalen Definitionsintervalle $I(x)$ allesamt gleich $\mathbb{R}$ und die Diffeomorphismen $\varphi^t$ allesamt Diffeomorphismen auf ganz $\Omega$, $\Omega_t=\Omega$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

Wir könnten deshalb auch wie folgt starten:

(1.2) <u>Definition</u>. Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $D\subseteq\Omega\times\mathbb{R}$ ein Gebiet, so dass $\Omega\times\{0\}\subseteq D$ ist und $(\{x\}\times\mathbb{R})\cap D$ zusammenhängend für jedes $x\in\Omega$ ist. Eine stetig differenzierbare Abbildung

$\varphi: D \to \Omega,\ (x,t) \longmapsto \varphi^t(x)$ heißt dann ein dynamisches System auf $\Omega$, wenn gilt:

(a) $\varphi^0(x) = x,\ \forall x \in \Omega$

(b) Setzt man für jedes $x \in \Omega$ das Intervall $I(x) \subseteq \mathbb{R}$ durch $\{x\} \times I(x) = \{x\} \times \mathbb{R} \cap D$ fest, so gilt für alle $s \in I(x)$: $t \in I(\varphi^s(x))$ genau wenn $t+s \in I(x)$ und

$$\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x).$$

(c) Es gibt kein $\tilde{D} \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften wie $D$ und $\tilde{D} \supsetneqq D$ mit einem $\tilde{\varphi}: \tilde{D} \to \Omega$ und den Eigenschaften aus (a), (b), d.h.: $(D, \varphi)$ ist maximal.

Dass in der Tat die mathematischen Konzepte einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und eines dynamischen Systems $\varphi$ auf $\Omega$ äquivalent sind, folgt nun daraus, wie man einem dynamischen System $\varphi$ ein Vektorfeld $f$ zuordnet. Man setzt nämlich einfach $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(x). \qquad (3)$$

Dann ist zunächst vollkommen klar, dass ein dynamisches System $\varphi$, welches von einem Vektorfeld $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ via $\dot{x} = f(x)$ kommt, dieses vermöge (3) reproduziert, denn es ist ja sogar

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = f(\varphi^t(x)) \qquad (4)$$

für alle $t \in I(x)$, insbesondere für $t=0$ (und $\varphi^0(x)=x$). Umgekehrt muss man aus (3) schließen, dass auch (4) für alle $t \in I(x)$, und nicht nur für $t=0$, gilt, was allgemeiner aussieht. Aber man hat ja die Flusseigenschaft (2) und die erlaubt einem nur so zu schließen:

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\varphi^{\tau+t}(x) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\varphi^{\tau}(\varphi^t(x)) = f(\varphi^t(x)).$$

(Die Diskussion darüber, wie sich die Maximalitätsbegriffe entsprechen, überlassen wir dem Leser.)

In diesem Sinne bedeutet also die Newtonsche Differentialgleichung für die Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften nichts weiter, als dass diese Bewegung vollständig festgelegt ist, wenn man ihren Ort und ihre Geschwindigkeit zu einem einzigen Zeitpunkt kennt (Determiniertheit). Wir wollen dabei allerdings erwähnen, dass diese Aussage nur dann gilt, wenn man wie oben beschrieben von den physikalischen Inhalten der Konzepte „Kraft" und „Masse" abstrahiert und das Newtonsche Gesetz ~~wie oben diskutiert~~ von der Gleichung $F=ma$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung $\ddot{x}=g(x)$ (ohne Interpretation von $g$) reduziert. Für einen Physiker ist das Gesetz freilich weitgehender, weil er den Konzepten „Masse" und „Kraft" eigene Inhalte zuzuweisen im Stande ist.

## §2. Erste Beispiele

Wir wollen also nun ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten, auf dem ein Vektorfeld $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist, und unsere ersten Versuche unternehmen, das zu der Gleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

gehörende dynamische System $\varphi = (\varphi^t)$ zu bestimmen.

Das einfachste, aber auch langweiligste System ist sicher durch das Nullvektorfeld $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$, für alle $x \in \Omega$, gegeben. Der zugehörige Fluss ist dann global und durch

$$\varphi^t(x) = x,$$

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, gegeben. Alles ruht und nichts fließt.

Nicht viel schwieriger ist das folgende System. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten jetzt das konstante Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = v$, also die Gleichung

$$\dot{x} = v.$$

Dann ist der zugehörige Fluss durch

$$\varphi^t(x) = x + tv$$

gegeben. Man nennt diese Bewegung gleichförmig geradlinig. Zum Nachweis muss man lediglich die Bedingungen $\varphi^0(x) = x$ und

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = f(\varphi^t(x))$$

für alle $x \in \Omega$ und $t \in I(x)$ überprüfen, was im obigen Fall offensichtlich ist. Auch hier ist der Fluss global.

Diese beiden (recht trivialen) Beispiele beweisen nun bereits das so genannte erste Newtonsche Gesetz (auch Trägheitsgesetz genannt), welches besagt, dass ein Körper, auf den keine Kräfte wirken (ein „freies Teilchen") eine gleichförmig geradlinige Bewegung vollzieht. In der Tat wird ja nun wegen $F=0$ Newtons zweites Gesetz zu $\ddot{x}=0$ auf $\mathbb{R}^3$, oder, wenn man die Reduktion auf ein System 1. Ordnung, wie in §1 beschrieben, durchführt, zu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

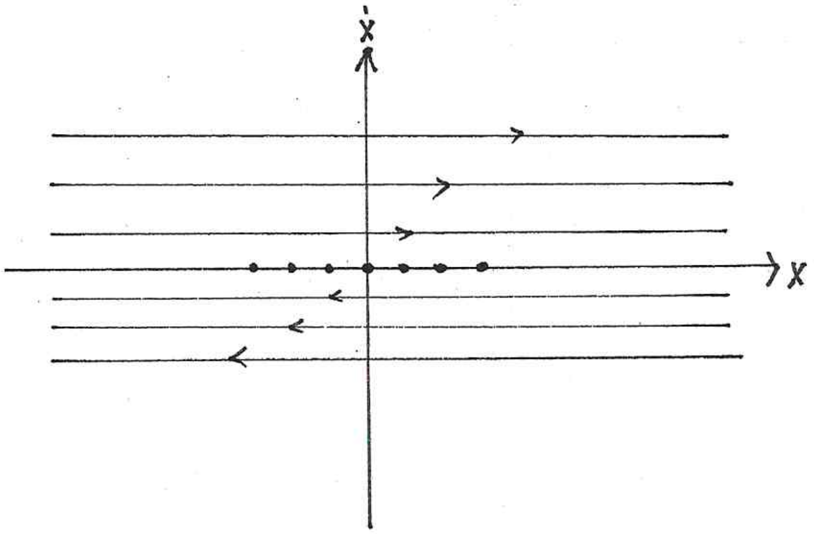
auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Aber wir können die Gleichung $\dot{y}=0$ isoliert betrachten oder abkoppeln, wie man sagt, und erhalten zum Anfang $y_0$ die Lösung $y(t)=y_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das in die erste Gleichung eingesetzt liefert $x(t) = x_0 + t y_0$, was also als Bewegungskurve die geradlinig gleichförmige Bewegung im $\mathbb{R}^3$ liefert. Übrigens schreibt man bei der Betrachtung von Systemen 2. Ordnung an Stelle von $y$ gerne $\dot{x}$, d.h. man betrachtet $\dot{x}$ als eine von $x$ unabhängige Variable — auch eine ziemliche Überbelastung der Notation, aber mit der Zeit gewöhnt man sich und schließlich schätzt man sie —, so dass also der Fluss von $\ddot{x}=0$ sich dann so schreibt:

oft schreiben wir nur die x-Komponente des Flusses, denn die y-Komponente ergibt sich durch Differentiation: $\varphi^t(x,\dot{x}) = x + t\dot{x}$ (etwas unpräzise).

$$\varphi^t(x,\dot{x}) = (x + t\dot{x}, \dot{x}).$$

Dies besagt also nichts anderes, als dass der Ort des Teilchens mit dem Anfangsort $x \in \mathbb{R}^3$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x} \in \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bei der Zeit $t \in \mathbb{R}$ durch $x + t\dot{x}$ gegeben ist.

Graphisch dargestellt wird der Fluss durch das so genannte Phasendiagramm, bei dem der Phasenraum zusammen mit einigen Lösungskurven skizziert wird.




Phasendiagramm von $\ddot{x} = 0$

Als nächstes wollen wir uns, nachdem wir bis hierher das Vektorfeld $f$ möglichst einfach gemacht haben, um den Fall niedrigster Dimension kümmern. Sei also $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion (welche wir, ohne es in Zukunft stets zu erwähnen, als genügend oft differenzierbar annehmen), von der wir — damit die nächste „Rechnung" klappt — als frei von Nullstellen annehmen wollen, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. In den Anfängen wird man die Gleichung $\dot{x} = f(x)$, $x \in \Omega$, (und die Physiker machen das wahrscheinlich immer noch so) wie folgt versucht haben zu „lösen" (d.h. den zugehörigen Fluss $(\varphi^t)$ zu finden):

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \Longrightarrow \frac{dx}{f(x)} = dt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t dt = t.$$

Das heißt: Man nehme eine Stammfunktion von $\Omega \to \mathbb{R}$, $y \longmapsto 1/f(y)$, werte diese bei $x$ und der Anfangsbedingung $x_0$ aus und subtrahiere, um die Umkehrfunktion $t(x)$ der gesuchten Funktion $x(t) = \varphi^t(x)$ zu erhalten. Man muss also bei diesem Verfahren die Prozesse „Stammfunktion finden" und „Umkehrfunktion bilden" ausführen können, was man in der älteren Literatur als <u>Lösen durch Quadratur</u> bezeichnet. Eine Zeit lang — sagen wir bis weit in das 19. Jahrhundert hinein — hat man geglaubt, dass man durch geschickte Koordinatentransformationen und Quadraturverfahren jede Gleichung lösen kann. Dass dies im Fall $n = 1$ wie oben beschrieben tatsächlich geht und obige Rechnung also „richtig" ist, wollen wir hier mathematisch präzise beweisen.

(2.1) <u>Satz</u> (Lösen durch Quadratur). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine nullstellenfreie stetig-differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass die Funktion $\tau$ auf $\Omega$, die durch die Vorschrift

$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}$$

gegeben ist, ein Diffeomorphismus von $\Omega$ nach $I$ ist, $\tau : \Omega \to I$, und ihre Umkehrung $\tau^{-1} : I \to \Omega$ ist die Lösungskurve des Systems $\dot{x} = f(x)$ auf $\Omega$ zum Anfangswert $x_0$,

$$\varphi^t(x_0) = \tau^{-1}(t).$$

Beweis. Weil $f$ nullstellenfrei, $\Omega$ ein Intervall und $f$ stetig ist, ist $f$ entweder überall positiv oder überall negativ; sagen wir o.E. $f(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$. (Der Beweis verläuft analog für $f < 0$.) Es ist dann die Stammfunktion $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ von $\Omega \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 1/f(y)$ mit $\tau(x_0) = 0$ streng monoton wachsend und sogar $\tau' > 0$, denn $\tau'(x) = 1/f(x) > 0$, und damit (nach dem Umkehrsatz) ein Diffeomorphismus auf sein Bild $\tau(\Omega) =: I$. Für die Umkehrfunktion $\varphi : I \to \Omega$ gilt wegen $\tau(x_0) = 0$ offenbar $\varphi(0) = x_0$ und

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\tau'(\varphi(t))} = f(\varphi(t))$$

für alle $t \in I$. Also ist $\varphi$ Lösungskurve von $\dot{x} = f(x)$ zur Anfangslage $x_0$.

$\blacksquare$

Als Beispiel für diese Quadraturmethode wollen wir den Fluss der Gleichung

$$\dot{x} = kx,$$

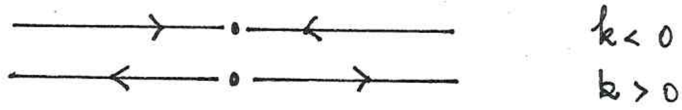
$k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, ermitteln, von dem wir freilich längst wissen, dass er durch

$$\varphi^t(x) = e^{kt}x$$

gegeben ist. Man kann sozusagen auf diese Weise die „e-Funktion finden", wenn man sie noch nicht kennt. (Allerdings wird angenommen, dass man sozusagen eine Maschine hat, die Stammfunktionen und Umkehrfunktionen ermittelt.) Machen wir es wie die Physiker:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{kx} = \frac{1}{k} \ln x \Big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{k} \ln \frac{x}{x_0} \Rightarrow x = x_0 e^{kt}.$$

Im wesentlichen findet man also die e-Funktion als Umkehrfunktion zu einer Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$. (Übrigens müsste man die Diskussion streng genommen in die drei Fälle $x_0 \in \mathbb{R}_-$, $x_0 = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}_+$ aufspalten, um die Voraussetzungen von Satz (2.1) zu erfüllen.) Das Phasendiagramm hängt qualitativ von dem Vorzeichen von $k$ ab:




Phasendiagramm zu $\dot{x} = kx$

Der Phasenraum $\mathbb{R}$ wird also in diesem Fall in genau drei Bahnen zerlegt.

Betrachten wir als nächstes Beispiel die Bewegung, die ein Körper ausführt, der der Kraft einer Feder unterliegt. In der Ruhelage $x = 0$ wirkt keine Kraft und bei einer Auslenkung $x \neq 0$ ist die Kraft proportional und entgegengesetzt zur Auslenkung, also durch

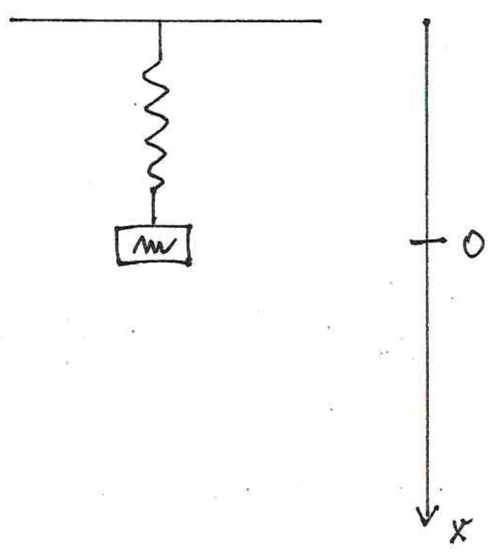
$$F(x) = -kx$$

gegeben (sogenanntes Hooke'sches Gesetz). Hier ist $k > 0$ eine Konstante, die nur von der Beschaffenheit der Feder abhängt und wird daher als „Federkonstante" bezeichnet. Nach der Newtonschen Gleichung erfüllt also die gesuchte Bewegung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – wir betrachten hier also den eindimensionalen Fall – die Gleichung

$$m\ddot{x} = -kx$$

($m > 0$ ist die Masse des Körpers).

dieses Diagr- nicht zeichnen



Setzen wir $\omega := \sqrt{k/m} > 0$, so wird dies also zu

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

was man auch als Schwingungsgleichung bezeichnet. Sie führt uns auf die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus, denn der zugehörige Fluss ist durch

$$\varphi^t(x,\dot{x}) = \left(x\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}}{\omega}\sin(\omega t), \dots\right) \qquad (1)$$

gegeben, wie man leicht nachprüft. Übrigens kann man hier Sinus und Cosinus auf (mindestens) zwei verschiedene Weisen „entdecken". Zum einen kann man das zugehörige System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

zunächst „komplexifizieren", d.h. als ein System nicht auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, sondern auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ betrachten. Führt man danach eine komplex-lineare Koordinatentransformation $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ derart durch, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

nach Konjugation mit $\Phi$ in eine Diagonalmatrix übergeht,

$$\Phi A \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

so muss für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von $A$ wegen $\mathrm{Spur}(A) = 0$ und $\det(A) = \omega^2$ gelten:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 \lambda_2 = \omega^2,$$

also $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm i\omega$, denn Spur und Determinante einer Matrix ändern sich bekanntlich beim Konjugieren nicht. Für die transformierte Lösung $z = \Phi x$, $z = (z^1, z^2)$, gelten also dann die entkoppelten Differentialgleichungen

$$\dot{z}^1 = i\omega z^1$$
$$\dot{z}^2 = -i\omega z^2,$$

welche, wie oben gesehen, auf $t \mapsto (c_1 e^{i\omega t}, c_2 e^{-i\omega t})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ führt. (Dazu muss man freilich erst mal den Mut aufbringen die komplexe Exponentialfunktion – etwa über die Potenzreihe der reellen e-Funktion – einzuführen und auch für sie einsehen, dass sie sich beim Ableiten reproduziert. Man gelangt also so auf die Spur der „Funktionentheorie", weil man mit der komplexen Differenzierbarkeit (Holomorphie) von Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ konfrontiert wird.) Aus diesem Grund wird die Lösung der Schwingungsgleichung eine Linearkombination aus dem Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Funktion $t \mapsto \exp(i\omega t)$ sein, was also $t \mapsto \cos(\omega t)$ und $t \mapsto \sin(\omega t)$ liefert. Diese Methode, wie man mit Hilfsmitteln der Linearen Algebra, im wesentlichen also dem Normalformensatz von Jordan für komplex-lineare Transformationen, eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ (d.h. eine $n\times n$-Matrix mit reellen Einträgen), löst, ist auch Gegenstand der Vorlesung „Analysis III". Wir wollen das deshalb hier nicht vertiefen.

Eine andere Methode, den Fluss der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ zu beschreiben, beruht auf der Entdeckung, dass es eine (nicht-konstante) Funktion $E$ auf dem Phasenraum $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gibt,

$$E : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,\dot{x}) \longmapsto E(x,\dot{x}),$$

die unter dem Fluss invariant bleibt, wie man sagt, d.h.

$$E(\varphi^t(x,\dot{x})) = E(x,\dot{x})$$

für alle $t \in I(x,\dot{x})$. Äquivalent ist die Aussage, dass

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,\dot{x})\cdot\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x})(-\omega^2 x) = 0$$

sein muss, was mit der Kettenregel aus

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(E(\varphi^t(x,\dot{x}))\right) = 0$$

und

$$\frac{d\varphi^t}{dt}(x,\dot{x})\Big|_{t=0} = (\dot{x}, -\omega^2 x)$$

folgt. Umgekehrt liefert die Flusseigenschaft, dass aus $d/dt|_{t=0}\, E(\varphi^t(x,\dot{x})) = 0$ für alle $(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^2$ sogar

$$\frac{d}{dt}E(\varphi^t(x,\dot{x}))=0$$

für alle $(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^2$ und allen $t\in I(x,\dot{x})$ folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(E(\varphi^t(x,\dot{x}))\right)=\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}E(\varphi^{t+\tau}(x,\dot{x}))=\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}E(\varphi^\tau(y,\dot{y}))=0$$

mit $(y,\dot{y}):=\varphi^t(x,\dot{x})$ (vgl. die Diskussion am Ende von §1$_{1}$).

Die Funktion, die in unserem Fall das Gewünschte leistet, ist die sogenannte Energie,

$$E(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2,$$

denn es ist offenbar

$$\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial E}{\partial\dot{x}}(-\omega^2x)=(\omega^2x)\dot{x}+\dot{x}(-\omega^2x)=0.$$

Die Existenz dieser Bewegungsinvarianten reduziert nun die ursprüngliche Gleichung $\ddot{x}+\omega^2x=0$ 2. Ordnung auf die Gleichung 1. Ordnung

$$\dot{x}^2=-\omega^2x^2+2E_0,$$

wenn wir mit $E_0=E(x_0,\dot{x}_0)$ die Anfangsenergie bezeichnen, die freilich, wie wir wissen, konstant bleibt unter der Lösung $\varphi_0$. (Genauer gesagt haben wir eine Reduktion auf eine Gleichung 1. Ordnung erhalten, die einen Parameter $E_0$ mit sich führt, der von der Anfangslage $(x_0,\dot{x}_0)$ der ursprünglichen Gleichung 2. Ordnung abhängt.) Löst man nun diese Gleichung mit der Quadraturmethode in „Physikermanner",

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{2E_0 - \omega^2 x^2}} = dt,$$

so kommt man für die Lösung z.B. für die Anfangslagen $x_0 = 0$ und $\dot{x}_0 > 0$, also $E_0 = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2$, auf die Gleichung

$$t = \frac{1}{\sqrt{2E_0}} \int_0^x \frac{dx}{+\sqrt{1-\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2E_0}}\right)^2}} = \frac{1}{\omega}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2E_0}}\right),$$

wobei wir die Substitution $x = \frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}y$ durchgeführt haben. (Welches Vorzeichen man vor der Wurzel zu wählen hat hängt dabei nicht nur von $E_0$, sondern von der „vollen" Anfangskonfiguration $(x_0, \dot{x}_0)$ ab.) Man entdeckt also hier den Sinus (und ähnliches gilt für den Cosinus bei einer anderen Wahl der Anfangskonfiguration) als Umkehrfunktion ~~zu $y \mapsto$~~ der Stammfunktion zu $y \longmapsto 1/\sqrt{1-y^2}$!

$$x = \frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}\sin(\omega t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

Es ist vom Standpunkt der qualitativen Betrachtung aus übrigens vor der Quadraturrechnung längst klar, wie das Phasendiagramm (und damit, wie sich der Fluss qualitativ verhält) aussieht. Die Niveaulinien der Energiefunktion, d.h.

$$E^{-1}(c) = \{(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : E(x,\dot{x}) = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

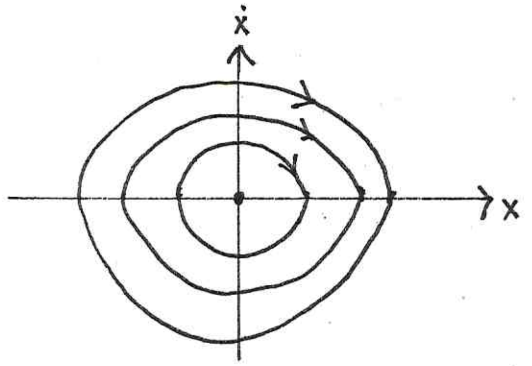
sind nämlich, wenn $c$ nicht gerade ein kritischer Wert (also in unserem Fall $c \neq 0$) ist, selbst schon (wenn sie nicht leer sind, also $c > 0$ hier), 1-dimensionale glatte Kurven (nach dem impliziten Funktionensatz) und müssen deshalb eine einzige Bahn sein (wie wir später noch präzise und für allgemeinere Systeme beweisen werden), wenn sie zusammenhängend sind. Schon daraus sieht man z.B., dass alle Bahnen – außer der Gleichgewichtslage bei $(x, \dot{x}) = (0,0)$ – periodisch sein müssen, denn die Niveaulinien sind allesamt achsenparallele Ellipsen,

evtl. präziser mit (2.1) beweisen. Dort folgt, dass $\Omega$ aus nur einer Bahn besteht,

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2c}{\omega}}\right)^2} + \frac{\dot{x}^2}{\left(\sqrt{2c}\right)^2} = 1$$

(mit Hauptachsen $\sqrt{2c/\omega}$ bzw. $\sqrt{2c}$) und damit geschlossen.

~~Ellipsen~~

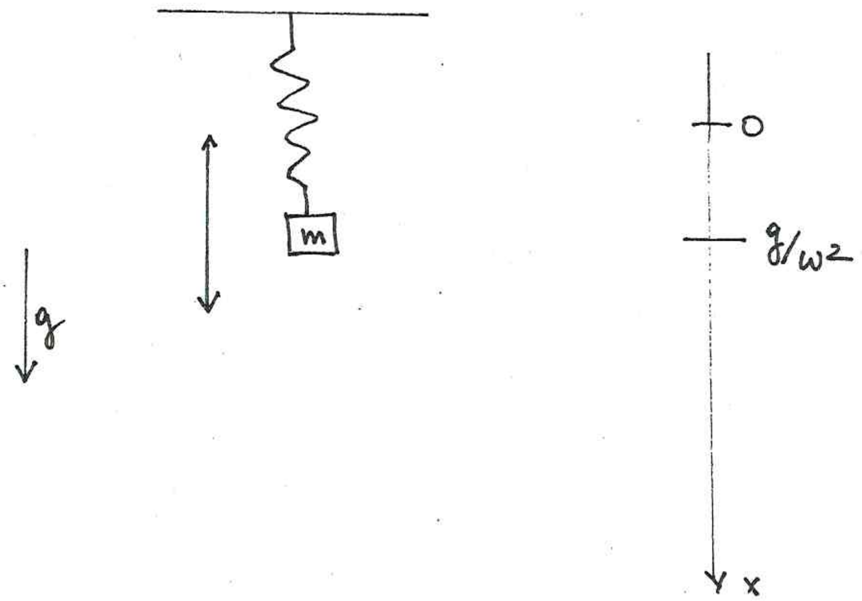



Phasendiagramm zu
$\ddot{x} + x = 0$

(Aus dem Phasendiagramm sieht man aber z.B. nicht, dass die Periodendauer $T$ unabhängig von der Bahn, nämlich $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ist.)

Man nennt das dynamische System zu $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$ auch den harmonischen Oszillator auf $\mathbb{R}$ (mit Frequenz $\omega$).

Schließlich wollen wir noch erwähnen (für die Zwecke des nächsten Paragraphen), dass sich die Situation für die Bewegung des Körpers nicht wesentlich ändert, wenn neben der entgegen der Auslenkung gerichteten Federkraft noch eine weitere konstante Kraft, z.B. die Schwerkraft $mg$ ($m$ die Masse des Körpers, $g>0$ eine Konstante) der Erde angreift.




Dann wird die Newtonsche Gleichung zu

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + g \qquad (2)$$

und das löst man, ähnlich wie ~~man~~ in der Linearen Algebra bei inhomogenen Gleichungssystemen, so, dass man zunächst eine spezielle Lösung sucht, in unserem Fall etwa die konstante

Lösung $x = g/\omega^2$ (überhaupt sucht man meistens zunächst die Gleichgewichtslagen), und darauf die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung aufaddiert. Schreibt man noch mit einer trigonometrischen Umformung (1) in

$$x(t) = A\cos(\omega t + t_0)$$

um, wobei $t_0$ (die „Anfangsphase") und $A$ (die „Amplitude") die Anfangsbedingungen $x_0$ und $\dot{x}_0$ enthalten, so erhält man die Lösung von (2) durch

$$x(t) = \frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega t + t_0). \qquad (3)$$

Man bezeichnet den (1-dimensionalen) harmonischen Oszillator manchmal auch als ein „lineares Pendel", weil nämlich die in der unteren Gleichgewichtslage „linearisierte Pendelgleichung" in $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (für ein gewisses $\omega > 0$) übergeht. Diese nicht-lineare Pendelgleichung wollen wir als letztes Beispiel betrachten.

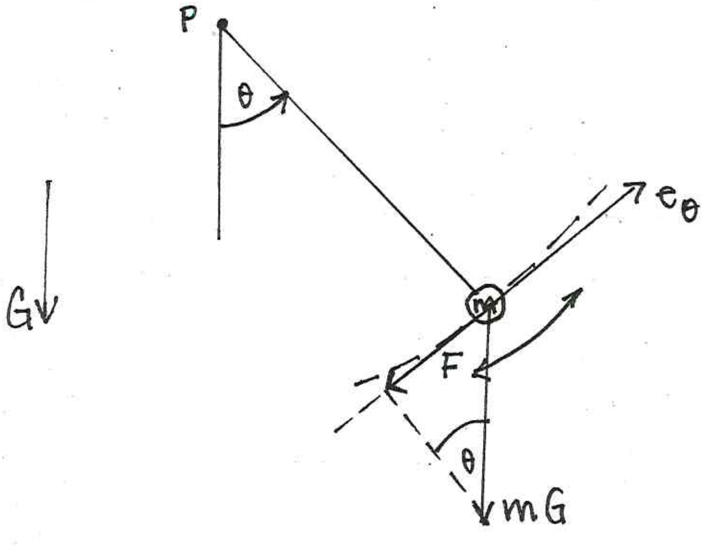
Ein Pendel besteht aus einem (als masselos angenommenen) Faden der Länge $l > 0$, dessen eines Ende $P$ fixiert ist und an dessen anderem Ende ein Körper der Masse $m > 0$ unter dem Einfluss des Schwerefeldes $G$ „pendeln" kann. Die angreifende Schwerkraft $mG$ wollen wir zunächst in ihre Tangential- und Normalkomponente an den Kreisbogen

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - P| = \ell\}$$

zulegen. Führen wir ein Koordinatensystem in der Ebene durch Festlegung des Ursprungs in $P$ und $e_2$ in die entgegengesetzte Richtung des Schwerefeldes $G$ ein, so dass $G = -g e_2$ mit $g > 0$ wird, und schließlich $e_1$ senkrecht zu $e_2$, so dass $(e_1, e_2)$ positiv orientiert ist, so erhält man für den Winkel $\theta$, der sich zwischen $-e_2$ und dem Ort $(x,y) \in S$ ergibt, dass die Tangentialkomponente $F$ der Schwerkraft $mG$, $F = (mG)^{\tan}$, gegeben ist durch

$$F = -mg\sin(\theta)\cdot e_\theta . \tag{4}$$

Hierbei ist $e_\theta$ der Vektor mit Länge 1, der tangential an $S$ in ~~(x,y)~~ $(x^1, x^2)$ in positiver Richtung steht.




Nun passt das Problem nicht ganz in unseren bisherigen Rahmen, denn die Bewegung findet auf $S \subseteq \mathbb{R}^2$ statt und $S$ ist kein Gebiet in $\mathbb{R}^2$! Wollten wir dieses Problem systematisieren, so würden wir zu dem Konzept von dynamischen Systemen auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ (denn eine solche ist $S \subseteq \mathbb{R}^2$) oder sogar auf beliebigen Mannigfaltigkeiten geführt, was wir hier aber nicht verfolgen wollen. An Stelle dessen helfen wir uns hier mit der folgenden Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R} \to S \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\Phi(\theta) = \left(\ell \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\theta), -\ell \cos(\theta)\right) = (x^1, x^2).$$

$\Phi$ wickelt sozusagen $\mathbb{R}$ auf $S$ (in positiver Richtung) auf und die neue Variable $\theta \in \mathbb{R}$ ist (bis auf Vielfache von $2\pi$) gerade der Winkel zwischen $-e_2$ und $\Phi(\theta)$. Insbesondere ist

$$e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{\ell}\Phi'(\theta),$$

wobei wir nun mit „ ' " die Differentiation nach $\theta$ bezeichnen, und $\Phi(0) = -\ell e_2$.

Wir betrachten nun von der Newtonschen Differentialgleichung nur die Gleichung für die Tangentialkomponente. (Die Kräfte, die in Normalenrichtung herrschen, werden durch die Straffung des Fadens im Gleichgewicht gehalten.) Mit (4) wird dann $m\ddot{x}^{tan} = F(x)$ zu

$$\ddot{x}^{tan} = -g \sin\theta \cdot e_\theta . \qquad (5)$$

Ist nun $t \mapsto (x^1(t), x^2(t))$ eine Lösungskurve, so kommt diese von einer Kurve $t \mapsto \theta(t)$ im Parameterbereich $\mathbb{R}$, $x(t) = \Phi(\theta(t))$. (Man sagt, dass man die Kurve $t \mapsto x(t)$ via $\Phi$ liften kann, was daran liegt, dass $\Phi$ eine so genannte

„überlagerung" im Sinne der Topologie ist. Im wesentlichen liftet man die Kurve lokal mit einer lokalen Winkelfunktion und setzt dann die lokalen Liftungen aneinander.)
Wir wollen nun klären, welcher Differentialgleichung $t \mapsto \theta(t)$ genügt. Damit haben wir nämlich dann gewissermaßen das ganze Problem von der (krummlinigen) Kreislinie $S$ auf den Parameterbereich $\mathbb{R}$ „geliftet". Wegen $x(t) = \Phi(\theta(t))$ ist zunächst $\dot{x} = \Phi' \circ \theta \cdot \dot{\theta}$ und nochmaliges Differenzieren liefert

$$\ddot{x} = \Phi''(\theta)\dot{\theta}^2 + \Phi'(\theta)\ddot{\theta}. \tag{6}$$

Nun ist $\Phi'(\theta)$ tangential an $S$ (in $\Phi(\theta)$) und $\Phi''(\theta)$ normal an $S$, $\Phi''(\theta) \perp \Phi'(\theta)$, denn

$$2 \frac{d}{d\theta} \langle \Phi'(\theta), \Phi''(\theta) \rangle = \frac{d}{d\theta} \langle \phi'(\theta), \phi'(\theta) \rangle = \frac{d}{d\theta}(\ell^2) = 0,$$

wo $\langle \cdot,\cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Deshalb ist (6) die Zerlegung von $\ddot{x}$ in Normal- und Tangentialkomponente, so dass wegen $\Phi' = \ell e_\theta$ aus (5)

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

folgt. Setzen wir schließlich $\omega := \sqrt{g/\ell}$ und ersetzen den Buchstaben $\theta$ durch $x$, so landen wir also bei der Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

auf $\mathbb{R}$. Die Linearisierung dieser Gleichung in der Gleichgewichtslage $x = 0$, d.h. die Ersetzung des nicht-linearen Anteils $x \mapsto \sin x$ durch seinen linearen Approximation $x \mapsto x$ um den Nullpunkt $x=0$, $\sin x = x + o(|x|)$, liefert dann den harmonischen Oszillator $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (mit $\omega = \sqrt{g/\ell}$).

Bevor wir nun das zugehörige dynamische System auf $\mathbb{R}^2$ qualitativ diskutieren, reskalieren wir noch die Zeit durch $t = \omega^{-1}\tau$. Dann transformiert sich nämlich $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ in

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega^{-2}\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin(x),$$

also, wenn wir $\tau$ wieder $t$ nennen, in

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \tag{7}$$

welches wir die Pendelgleichung nennen.

Weil $x \mapsto -\cos x$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \sin x$ ist, sieht man wie im linearen Fall, dass $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x$$

eine Bewegungsinvariante ist,

$$\frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}(-\sin x) = \sin(x)\cdot\dot{x} + \dot{x}(-\sin x) = 0,$$

und man könnte über das Quadraturverfahren zu einer expliziten Lösung der Gleichung gelangen. (Allerdings muss man dann eine Stammfunktion von $1/\sqrt{2(E-\cos x)}$ und deren Umkehrfunktion „explizit" angeben.) Wir gehen hier entsprechend unserer Zielsetzung qualitativ vor und wollen das Phasendiagramm bestimmen. Als System 1. Ordnung wird die Pendelgleichung zu

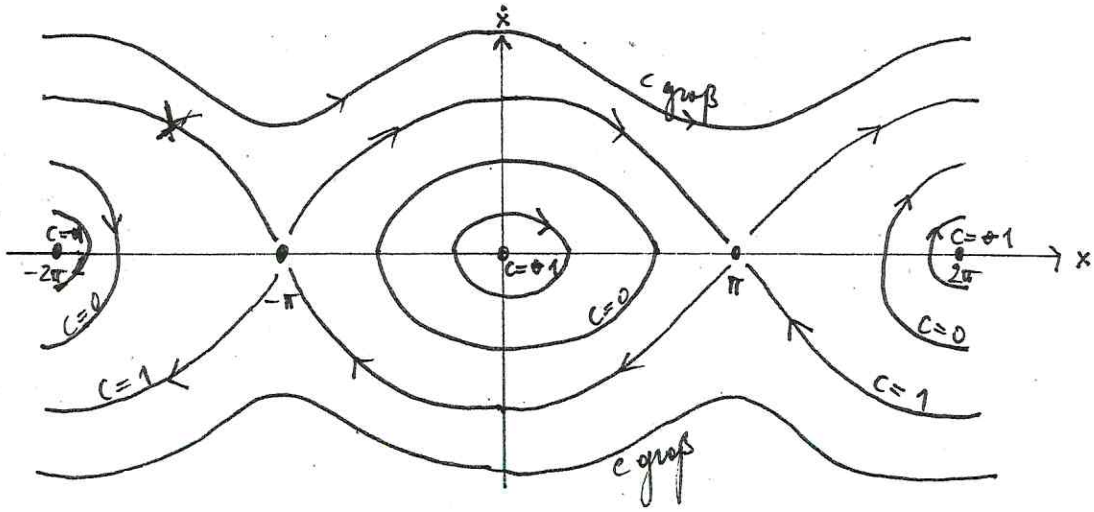
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\sin x$$

auf $\mathbb{R}^2$, und dem entnimmt man unmittelbar, dass die Gleichgewichtslagen, also die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, die sich unter dem Fluss nicht bewegen, bei $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, liegen. Bei diesen Stellen ist die Energie $E = \pm 1$, je nachdem, ob $k$ ungerade oder gerade ist. Dies sind auch genau die kritischen Werte von $E$, denn man kann das System auch in der Form

$$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial E}{\partial x} \tag{8}$$

schreiben; eine Struktur von Gleichungen, von der später noch systematischer die Rede sein wird. Die Niveaulinien $E^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^2$, $c \neq \pm 1$, sind also allesamt ~~bei~~ glatte Kurven ohne Gleichgewichtslagen (wenn sie nicht-leer sind) und müssen deshalb Bahnen des Flusses sein (vgl. Aufgabe 3, Blatt 2). Das Einzeichnen der Niveaulinien beschreibt also damit das Phasendiagramm weitgehend. Man beachte schließlich, dass das Diagramm $2\pi$-periodisch in $x$-Richtung ist, was, wenn man sich die Herkunft der Pendelgleichung noch mal vergegenwärtigt, einsichtig ist.
Der Phasenraum der ursprünglichen Gleichung ist nämlich eigentlich der Zylinder $S \times \mathbb{R}$, so dass man sich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (via $(\Phi, \mathrm{id})$) auf $S \times \mathbb{R}$ aufgewickelt denken

sollte und so z.B. nur zwei Gleichgewichtslagen hat: bei $x=0$ die „untere" und bei $x=\pm\pi$ die „obere".




Phasendiagramm
zu $\ddot{x} + \sin x = 0$

## §3. Die Keplerschen Gesetze

So lange es Menschen gibt, so lange gibt es vermutlich auch die Faszination über den nächtlichen Sternenhimmel. Von besonderem Interesse sind dabei jene „Wandelsterne", die nicht nur durch ihre Helligkeit auffallen (und auch ihrer Ausdehnung, wenn man genau hinschaut, denn in einem gar nicht mal teuren Fernrohr ist z.B. der Jupiter schon eine beträchtliche Scheibe und kein Punkt mehr), sondern vor allem dadurch, dass sie ihre Lage relativ zu den anderen Sternen (die „fix" sind) ständig ändern (eben „herumwandeln"). Es verwundert daher nicht, dass schon in frühesten Zeiten die Bewegung dieser Planeten eine starke Triebfeder für die Mathematik,