$$\frac{1}{2}\ell T = \int_0^T \dot{A}(t)\,dt = A(T) = \pi ab,$$

was mit $\ell^2 = p$ und $p = b^2/a$ zu

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\ell^2}a^2b^2 = 4\pi^2 a^3$$

führt. Auch das 3. Keplersche Gesetz ist damit bewiesen.

§4. Gleichgewichtlagen

Wir haben am Ende von §2 bei der Diskussion des nicht-linearen Pendels und auch in §3 bei der Diskussion der Kepler~~glei~~-Bewegung der Planeten um die Sonne regen Gebrauch von einer Koordinatentransformation gemacht, die uns im Pendelfall zu der Gleichung $\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$ auf $\mathbb{R}$ und im Kepler-Fall zu $\ddot{r} = -r^{-2} + \ell^2 r^{-3}$ auf $\mathbb{R}_+$ führte. Wir wollen zu Beginn dieses Paragraphen systematischer untersuchen, wie sich die Differentialgleichung eines dynamischen Systems ändert, wenn man dieses einem Koordinatenwechsel unterzieht.

(4.1) Definition. Seien $D, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete so wie $\psi = (\psi^t)$ ein dynamisches System auf D und $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf Ω. Wir sagen, dass (D, ψ) äquivalent zu (Ω, φ) ist, wenn es einen Diffeomorphismus $u: D \to \Omega$ gibt, so dass für alle $y \in D$ gilt: $I(u(y)) = I(y)$ und für alle $t \in I(y)$ ist

$$u(\psi^t(y)) = \varphi^t(u(y)). \tag{1}$$

Prüfen wir nun, was das für die zugehörenden Vektorfelder $g: D \to \mathbb{R}^n$ bzw. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ der dynamischen Systeme ψ und φ bedeutet, wie sich die zugehörigen Differentialgleichungen $\dot{y} = g(y)$ auf D und $\dot{x} = f(x)$ auf Ω zueinander verhalten. Nach Definition ist

$$g(y) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi^t(y), \quad f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi^t(x)$$

und Ausnützen von (1) liefert zusammen mit der Regel über die Ableitung der inversen Abbildung $u^{-1}: \Omega \to D$, dass

$$g(y) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi^t(y) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (u^{-1} \circ \varphi^t)(u(y)) = Du^{-1}(u(y)) \frac{d\varphi^t}{dt}\Big|_0 (u(y))$$
$$= \left(Du(y)\right)^{-1} f(u(y)).$$

Man muss also, will man das dynamische System $\varphi = (\varphi^t)$, zu $\dot{x} = f(x)$ auf Ω vermöge $u: D \to \Omega$ transformieren, das Vektorfeld $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit dem Inversen des Differentials Du „zurückholen".

Setzt man umgekehrt nämlich für einen Diffeomorphismus $u: D \to \Omega$ und ein Vektorfeld $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld $g: D \to \mathbb{R}^n$ durch

$$g := (Du)^{-1} \cdot (f \circ u) \tag{2}$$

fest, so ist das dynamische System $\psi = (\psi^t)$, welches zu g gehört, vermöge u äquivalent zu dem dynamischen System $\varphi = (\varphi^t)$, welches zu f gehört. Das folgt unmittelbar aus dem Eindeutigkeitssatz für die Lösung von Differentialgleichungen, weil für jedes $y \in D$ die beiden Kurven $t \mapsto u(\psi^t(y))$ und $t \mapsto \varphi^t(u(y))$ in Ω den gleichen Anfangswert $x = u(y)$ haben und die selbe Gleichung auf Ω lösen, nämlich $\dot{x} = f(x)$:

$$\frac{d}{dt}(u \circ \psi^t(y)) = Du(\psi^t(y)) \cdot \frac{d\psi^t}{dt}(y) = Du(\psi^t(y)) \cdot g(\psi^t(y))$$

$$= f(u \circ \psi^t(y));$$

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(u(y)) = f(\varphi^t(u(y))).$$

Wir wollen deshalb zwei Vektorfelder $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $g : D \to \mathbb{R}^n$ äquivalent nennen, wenn es einen Diffeomorphismus $u : D \to \Omega$ gibt, so dass (2) gilt.

Der folgende Satz kann als ein Normalformen-Satz für dynamische Systeme in der Umgebung von Punkten angesehen werden, die keine Gleichgewichtslagen sind.

(4.2) Satz. Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete und $g : D \to \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfelder. Seien $y_0 \in D$ und $x_0 \in \Omega$ beliebig mit $g(y_0) \neq 0 \neq f(x_0)$. Dann gibt es Umgebungen $V \subset D$ von y_0 und $U \subseteq \Omega$ von x_0, so dass $g|V$ und $f|U$ äquivalent sind.

Beweis. Wenn alle dynamischen Systeme lokal um ihre Nicht-Gleichgewichtslagen äquivalent sein sollen, so können wir im Beweis o.E. annehmen, dass (D, g) von einer besonders einfachen Gestalt (sozusagen Normalformen-Gestalt) ist, sagen wir $D = \mathbb{R}^n$, $y_0 = 0$ und $g(y) = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Aus der Transitivität der Äquivalenzrelation würde dann unmittelbar aus der Äquivalenz von (Ω, f) lokal um x_0 zu $(\mathbb{R}^n, e_1)$ um $y_0 = 0$ auch die Äquivalenz von (Ω, f) um x_0 zu einem beliebigen (D, g) um y_0 folgen

Nun können wir aber den Fluss ψ zu $(\mathbb{R}^n, e_1)$ explizit beschreiben (siehe §2),

$$\psi^t(y) = (y^1 + t, y^2, \ldots, y^n).$$

Wir nehmen nun o.E. weiter an, dass auch $x_0 = 0$ ist und $f^1(x_0) \neq 0$; wenn nicht, so unterwerfen wir (Ω, f) vorher einer Translation und einer evtl. Drehung. Der Fluss (φ^t) wird deshalb lokal um $x_0 = 0$ transversal zur Hyperebene $H = \{x^1 = 0\}$ sein. Wenn wir es deshalb mit dem Ansatz versuchen, dass der gesuchte Diffeomorphismus u auf H die Identität ist, so gibt es, wollen wir Bedingung (1) erfüllen, für den Diffeomorphismus u nur einen Kandidat $u : B_\delta(0) \to \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ klein genug, denn mit $y' := (y^2, \ldots, y^n)$ folgt aus (1) für $(0, y') \in H$:

$$u(y) = u(\psi^{y^1}(0, y')) \overset{(1)}{=\!=} \varphi^{y^1}(u(0, y')) = \varphi^{y^1}(0, y').$$

Wir setzen also

$$u(y) := \varphi^{y^1}(0, y^2, \ldots, y^n),$$

wobei $\delta > 0$ so klein gewählt ist, dass u auch für alle $y \in B_\delta(0) = \{y : |y| < \delta\}$ definiert ist, wenn man etwa $\delta' < \min\{t_+(0), -t_-(0)\}$ wählt, wo $I(0) = (t_-(0), t_+(0))$ das Definitionsintervall von $x_0 = 0$ in Ω ist und eventuell weiter zu $\delta < \delta'$ verkleinert, so dass auch $I(x) \supseteq (-\delta, +\delta)$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Diese Abbildung kann man stets definieren (auch wenn $f(0) = 0$ ist) und sie erfüllt die Bedingung (1) dann auch für alle $y \in B_\delta(0)$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $\eta^t(y) \in B_\delta(0)$ (nicht nur für $(0, y') \in H$),

$$u(\eta^t(y)) = u(y^1 + t, y') = \varphi^{y^1+t}(0, y') = \varphi^t(\varphi^{y^1}(0, y'))$$

$$= \varphi^t(u(y)).$$

Es bleibt daher zu prüfen, ob sie auf einer evtl. kleineren Umgebung $V \subseteq B_\delta(0)$ um 0 ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Nach dem Umkehrsatz der Differentialrechnung kommt dies wiederum darauf hinaus, dass das Differential $Du(0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. Diese Tatsache sollte nun freilich dadurch geliefert werden, dass $x_0 = 0$ keine Gleichgewichtslage ist, $f(0) \neq 0$. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial y^1}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi^t(0) = f(0)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial u^k}(0) = \frac{d}{ds}\Big|_0 \varphi^0(0, \ldots, s, \ldots 0) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

denn $\varphi^0(x) = x$. Es ist also

$$Du(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} f^1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & \mathbb{1} & \\ f^n(0) & & & \end{array}\right),$$

und damit $\det(Du(0)) = f^1(0) \neq 0$. Der Satz ist bewiesen.

$\boxtimes$

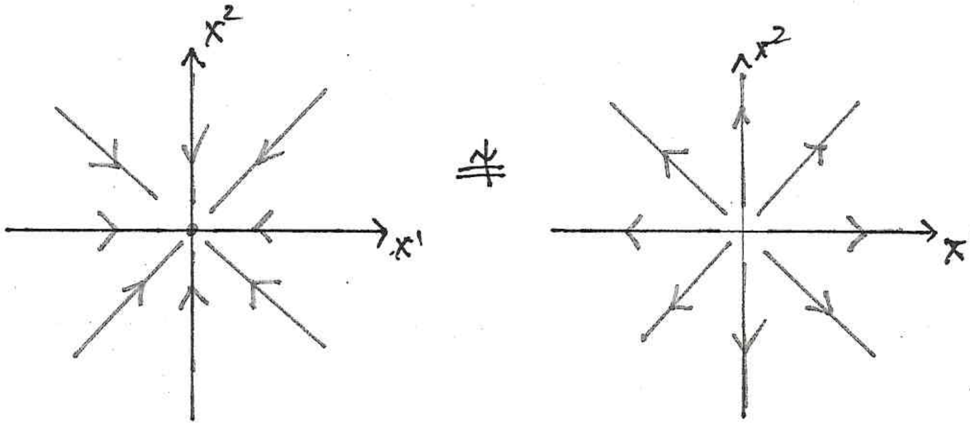
Für das lokale Verhalten dynamischer Systeme sind daher nur die Punkte von Interesse, wo das zugehörige Vektorfeld verschwindet. Wir erinnern an den schon des öfteren verwendeten Begriff der Gleichgewichtlage:

(4.3) Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf Ω. Es heißt $p \in \Omega$ eine Gleichgewichtslage von φ, wenn $I(p) = \mathbb{R}$ ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi^t(p) = p.$$

Ist $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ das zu φ gehörende Vektorfeld, also $f(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi^t(x)$, so folgt unmittelbar, dass eine Gleichgewichtslage $p \in \Omega$ eine Nullstelle von f sein muss, $f(p) = 0$. Umgekehrt sind die Nullstellen von f auch Gleichgewichtslagen, denn offenbar löst die konstante Funktion $x: \mathbb{R} \to \Omega$, $x(t) = p$, die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ zum Anfangswert $x(0) = p$, wenn $f(p) = 0$ ist.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wie denn dynamische Systeme (Ω, φ) in einer Umgebung einer Gleichgewichtslage $p \in \Omega$ aussehen können. Klar ist dabei zunächst, dass sie sicher nicht alle lokal äquivalent sein können, denn ein System wie $\dot{x} = -x$, das alles in seine Gleichgewichtslage $p = 0$ hineinzieht, kann sicher nicht äquivalent zu einem System wie das von $\dot{x} = +x$ um $p = 0$ sein, dass alles (außer $p = 0$ natürlich) von seiner Gleichgewichtslage wegstößt,



$\dot{x} = -x$ $\qquad\qquad$ $\dot{x} = x$

Der sehr wichtige Begriff der Stabilität für eine Gleichgewichtslage ist nun wie folgt gegeben.

(4.4.) Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $p \in \Omega$ eine Gleichgewichtslage, $f(p) = 0$.

(a) Man nennt p stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in \Omega$ mit $|x - p| < \delta$, so ist $t_+(x) = \infty$ und es ist

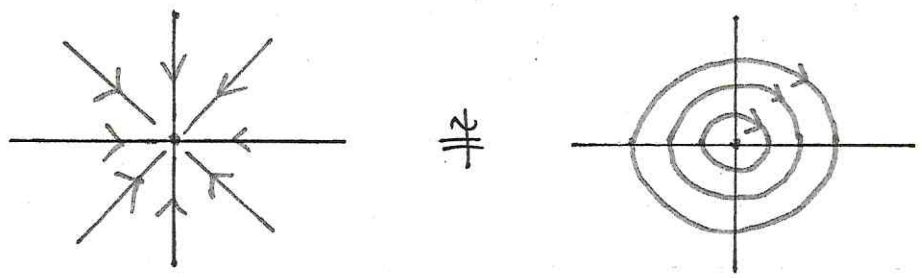
$$|\varphi^t(x) - p| < \varepsilon,$$

für alle $t > 0$.

(b) Man nennt p asymptotisch stabil (oder einen Attraktor), wenn p stabil ist und außerdem ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in B_\delta(p)$ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi^t(x) = p.$$

Es ist klar, dass diese Eigenschaften erhalten bleiben, wenn man das dynamische System (Ω, φ) zu $\dot{x} = f(x)$ vermöge eines Diffeomorphismus' $u : D \to \Omega$, ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet), auf ein dynamisches System ψ auf D transformiert (siehe Blatt 5, Aufgabe 1). Natürlich ist $p = 0$ im Beispiel $\dot{x} = -x$ auf $\mathbb{R}^n$ ein Attraktor. Dagegen hat der harmonische Oszillator $\ddot{x} + x = 0$ auf $\mathbb{R}$, also $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ in $p = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage, die aber nicht asymptotisch stabil ist.



$\not\simeq$

$\dot{x}^1 = -x^1$
$\dot{x}^2 = -x^2$

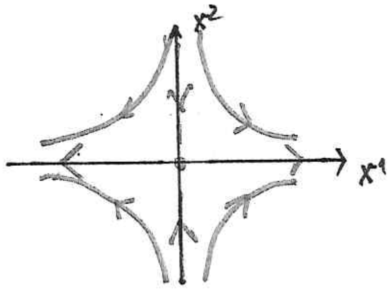
$\dot{x}^1 = -x^2$
$\dot{x}^2 = +x^1$

Ein Beispiel einer Gleichgewichtslage, die weder stabil noch „stabil in die Vergangenheit" ist (das soll heißen, dass man das

System nicht für $t>0$, sondern für $t<0$ studiert) ~~ist~~ durch

$$\dot{x}^1 = +x^1$$
$$\dot{x}^2 = -x^2$$

gegeben,

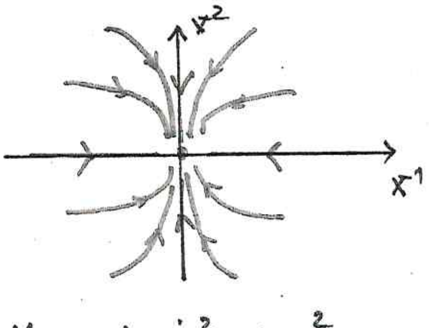


$$\dot{x}^1 = x^1$$
$$x^2 = -x^2$$

Alle diese Gleichgewichtslagen können paarweise nicht lokal äquivalent sein. Aber, sagen wir, – selbst innerhalb der Attraktoren gibt es verschiedene Arten, wie es z.B. für

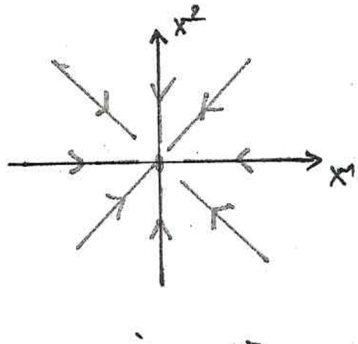
$$\dot{x}^1 = \alpha_1 x^1$$
$$\dot{x}^2 = \alpha_2 x^2$$

mit $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$ im Vergleich zu $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ deutlich wird,



$\dot{x}^1 = \alpha_1 x^1$, $\dot{x}^2 = \alpha_2 x^2$

$\alpha_1 < \alpha_2 < 0$



$\dot{x} = -x$

Es ist daher vielleicht klar, dass die Zahlen α_1, α_2 im obigen Beispiel eine besondere Rolle spielen. Man setzt nun:

(4.5) Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $p \in \Omega$ eine Gleichgewichtslage des zu $\dot{x} = f(x)$ gehörenden dynamischen Systems, $f(p) = 0$. Ist $A := Df(0) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, so nennt man die Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ von A (mit Vielfachheiten) die charakteristischen Exponenten von p.

Die Bedeutung der charakteristischen Exponenten mitsamt ihrer (algebraischen und geometrischen) Vielfachheiten, genauer genommen die Konjugationsklasse

$$[A] = \{ SAS^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : S \in GL_n(\mathbb{R}) \}$$

der Ableitung $A = Df(p)$, liegt nun darin, dass ~~die~~ die Invarianten unter lokaler Äquivalenz sind:

(4.6) Proposition. Sei $p \in \Omega$ eine Gleichgewichtslage eines dynamischen Systems (Ω, φ) und sei (D, ψ) ein dynamisches System, welches äquivalent zu (Ω, φ) ist. Ist $q \in D$ und $u(q) = p$, so gilt: q ist eine Gleichgewichtslage und die charakteristischen Exponenten von q sind (mit Vielfachheiten) die selben wie die von p.

Beweis. Sei $u: D \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, der die Äquivalenz von (D,ψ) zu (Ω,φ) herstellt und $g: D \to \mathbb{R}^n$ bzw. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ die zugehörigen Vektorfelder. Es ist dann für alle $y \in D$

$$g(y) = \left(Du(y)\right)^{-1} f(u(y)). \qquad (3)$$

Ist $p \in \Omega$ Gleichgewichtslage, also $f(p)=0$, so ist deshalb natürlich $g(q)=0$, also q eine Gleichgewichtslage von ψ. Wir setzen nun

$$S = \left(Du(q)\right)^{-1},$$

sowie $A = Df(p)$ und $B = Dg(q)$ und behaupten, dass

$$B = SAS^{-1}$$

ist. Das zeigt dann, dass die charakteristischen Exponenten von p und q, nämlich die Eigenwerte von A und B übereinstimmen (A und B sind sogar ähnlich). Schreiben wir

$$\left(s^i_j(y)\right)_{i,j} := \left(Du(y)\right)^{-1},$$

so liest sich (3) in Komponenten als

$$g^i(y) = \sum_{j=1}^n s^i_j(y) f^j(u(y)) \qquad (i=1,\dots,n)$$

und Differenzieren ergibt

$$\frac{\partial g^i}{\partial y^k}(q) = \sum_j \left(\frac{\partial s^i_j}{\partial y^k}(q) \cdot \underbrace{f^j(p)}_{=0} + s^i_j(q) \sum_\ell \frac{\partial f^j}{\partial x^\ell}(p) \cdot \frac{\partial u^\ell}{\partial y^k}(q) \right)$$

Weil aber $\left(\frac{\partial u^l}{\partial y^k}(q)\right)_{l,k} = Du(q) = S^{-1}$, $B = \left(\frac{\partial g^i}{\partial y^k}(q)\right)_{i,k}$ und $A = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^l}(p)\right)_{j,l}$ ist, erhält man tatsächlich

$$B = SAS^{-1}.$$

$\boxtimes$

Wir wollen nun untersuchen, wie die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität einer Gleichgewichtslage mit ihren charakteristischen Exponenten zusammenhängt.

Betrachten wir dazu zunächst mal den Fall linearer Systeme. Es sei also $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ beliebig und es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A. Wir betrachten das lineare System

$$\dot{x} = Ax$$

auf $\mathbb{R}^n$, für das natürlich $p = 0$ eine Gleichgewichtslage mit charakteristischen Exponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ist. Es ist nun nützlich, dieses System sozusagen zu „komplexifizieren", es also als ein System auf $\mathbb{C}^n$ zu betrachten,

$$\dot{z} = Az,$$

$z \in \mathbb{C}^n$, weil man dadurch dann auch komplex-lineare Koordinatentransformationen $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zur Verfügung stehen hat. Die Frage nach der Stabilität der Gleichgewichtslage $p = 0$ wird dadurch nicht berührt, denn man muss lediglich für eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ wissen, ob die zugehörigen Bahnen beschränkt bleiben,

$$|v_j(t)| \leq C \quad , \quad 0 < t < \infty .$$

Dann folgt mit der Linearität des Lösungsraumes unmittelbar, dass für $x = \sum_j \lambda^j v_j$ gilt:

$$|x(t)| = |\sum_{j=1}^{n} \lambda^j v_j(t)| \leq \sum_j |\lambda^j| C < \varepsilon,$$

wenn $|\lambda^j| \leq \varepsilon/(nC)$ $(j = 1, \dots, n)$, also $|x|$ klein genug ist. Weil aber $(v_1, \dots, v_n)$ auch eine $\mathbb{C}$-Basis für $\mathbb{C}^n$ ist, gilt das Gleiche auch für die Gleichgewichtslage $p = 0$ von $\dot{z} = Az$ auf $\mathbb{C}^n$.

Nun spielen für die Stabilitätsfrage die Realteile der charakteristischen Exponenten aus folgendem Grund eine wichtige Rolle. Ist $\alpha = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor, so ist die Lösung von $\dot{z} = Az$ mit Anfang $z(0) = v$ durch

$$z(t) = e^{\alpha t} v,$$

$t \in \mathbb{R}$, gegeben, denn

$$\dot{z}(t) = \alpha e^{\alpha t} v = \cancel{\alpha} A(e^{\alpha t} v) = Az(t),$$

weil mit v natürlich auch das Vielfache $e^{\alpha t} v$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert α ist

Aus diesem Grund ist

$$|z(t)| = |e^{\lambda t} \cdot e^{i\mu t} \cdot v| = e^{\lambda t} |v|, \qquad (3)$$

(denn $|e^{i\mu t}| = 1$), und das ist für $t > 0$ genau dann beschränkt, wenn $\lambda = \mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$ ist. Wir wissen aber bereits, dass $p = 0$ genau dann stabil ist, wenn alle Bahnen für $t > 0$ beschränkt bleiben. Also gilt:

(4.7) Satz. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit Eigenwerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Ist $p = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage von $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, so muss notwendig $\mathrm{Re}(\alpha_j) \leq 0$ für $j = 1, \ldots, n$ sein.

$\boxtimes$

Man sieht an dieser Diskussion auch, welche Konsequenz eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage $p = 0$ ~~für~~ $\dot{x} = Ax$ für die Eigenwerte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ von A nach sich zieht. von
Es ist nämlich zunächst klar, dass $p = 0$ asymptotisch stabil genau dann ist, wenn $p = 0$ sogar ein globaler Attraktor ist, d.h.

$$\lim_{t \to \infty} \varphi^t(x) = 0$$

ist, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (oder alle $z \in \mathbb{C}^n$), wobei man dies wiederum nur auf einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ prüfen müsste. Für die Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{C}$ bedeutet dies unmittelbar aus (3), dass sogar

$$\mathrm{Re}(\alpha) < 0$$

(für alle Eigenwerte α von A) gelten muss, weil $p=0$ ein linearer Attraktor sein.

Um nun zu prüfen, ob diese Bedingung auch hinreichend ist, erinnern wir an die Lösung von $\dot{x} = Ax$ für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, welches durch

$$\varphi^t(x) = e^{tA} x \tag{4}$$

gegeben ist. Hierbei ist $\exp : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Exponentialabbildung,

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

Führt man noch die Operatornorm $\|\cdot\| : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ durch

$$\|A\| := \max\{ |Ax| : |x| = 1 \}$$

ein, wobei $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ die euklidische Norm sei, so folgt aus der sofort einzusehenden Ungleichung

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

(für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$), dass exp sogar absolut konvergiert, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|} < \infty .$$

Ebenso leicht sieht man, dass $t \mapsto e^{tA}$, $\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, differenzierbar ist und

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} = e^{tA} \cdot A$$

erfüllt. Deshalb ist tatsächlich (4) das dynamische System zu $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$. Weil es nun nur auf die Beschränktheit der Bahnen $t \to e^{tA}x$, $t > 0$ bzw. deren Konvergenz nach $p = 0$ für die Frage der Stabilität bzw. asymptotischen Stabilität von $p = 0$ ankommt, ist es klar, dass die Beschränktheit bzw. die Konvergenz der Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$t \longmapsto \| e^{tA} \|$$

hinreichend ist (wobei wir hier die ~~le~~ sofort einzusehende Ungleichung ~~$|Ax|$~~

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x| ,$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, benutzt haben).

Bevor dies nun weiter untersuchen, erinnern wir an ein für die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen fundamentales Lemma (genauer gesagt ein Spezialfall davon):

(4.8) Lemma (Gronwall). Sei $u : [0, T) \to [0, \infty)$, $T > 0$ eine nicht-negative differenzierbare Funktion und es gebe $\alpha < \beta$, so dass für alle $t \in [0, T)$ gelte:

$$\alpha u(t) \leq \dot{u}(t) \leq \beta u(t) .$$

Dann gilt für alle $t \in [0,T)$:

$$u(0)\, e^{\alpha t} \le u(t) \le u(0)\, e^{\beta t}.$$

<u>Beweis</u>. Es ist

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t} u(t)\right) = e^{-\beta t}(-\beta u + \dot{u}) \le 0,$$

also $t \mapsto e^{-\beta t} u(t)$ monoton fallend, insbesondere

$$e^{-\beta t} u(t) \le e^{-\beta \cdot 0} u(0) = u(0),$$

~~so~~ also

$$u(t) \le u(0)\, e^{\beta t}.$$

Ähnlich schließt man aus $\alpha u \le \dot{u}$, dass $u(t) \ge u(0)\, e^{\alpha t}$ ist.

$\boxtimes$

Sei im Folgenden $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ das kanonische Hermitesche Produkt auf $\mathbb{C}^n$,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z^j \cdot \overline{w^j}.$$

Wir beweisen nun:

(4.9) <u>Lemma</u>. Sei $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\alpha |z|^2 \le \operatorname{Re} \langle Az, z \rangle \le \beta |z|^2.$$

Dann gilt für alle $t > 0$:

$$e^{\alpha t} \leq \| e^{tA} \| \leq e^{\beta t}.$$

<u>Beweis</u>. Es ist $z(t) = e^{tA} z$ Lösung von $\dot{z} = Az$ mit Anfang $z \in \mathbb{C}^n$. Also ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 &= \langle \dot{z}, z \rangle + \langle z, \dot{z} \rangle = \langle \dot{z}, z \rangle + \overline{\langle \dot{z}, z \rangle} \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle \dot{z}, z \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle Az, z \rangle \leq 2\beta |z(t)|^2. \end{aligned}$$

Mit Gronwalls Lemma folgt

$$|e^{tA} z|^2 = |z(t)|^2 \leq e^{2\beta t} |z|^2.$$

Also ist

$$\| e^{tA} \| = \max \{ |e^{tA} z| : |z| = 1 \} \leq e^{\beta t}.$$

Die Abschätzung $\| e^{tA} \| \geq e^{\alpha t}$ folgt analog. ☑

Damit können wir nun beweisen:

(4.10) <u>Satz</u>. Es ist $p = 0$ genau dann ein Attraktor für das lineare System $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, wenn für alle Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{C}$ von $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$\operatorname{Re}(\alpha) < 0.$$

<u>Beweis</u>. Wir hatten schon bemerkt (4.7), dass ein linearer Attraktor notwendig alle Eigenwerte in

der offenen linken Hälfte der Gaußschen Zahlenebene" haben muss und müssen daher noch zeigen, dass aus $Re(\alpha_j) < 0$ $(j = 1, \dots, n)$ für die Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ von A auch folgt, dass $p = 0$ attraktiv ist. Wir wollen nun zeigen:

$$\lim_{t \to \infty} \| e^{tA} \| = 0.$$

Nun können wir das System wie gewohnt auch auf $\mathbb{C}^n$ betrachten und daher komplexe Koordinatentransformationen $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zulassen. Aus der Definition der Exponentialabbildung folgt weiter unmittelbar, dass

$$\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1}$$

ist. Daher dürfen wir ohne Einschränkung A in einer Normalform annehmen. Über $\mathbb{C}$ ist nun A zwar i. a. nicht diagonalisierbar, wohl aber trigonalisierbar. Wir nehmen also an, dass

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ist. Nun konjugieren wir A noch einmal und zwar so, dass es beliebig nah an seinen Diagonalteil heran kommt. Setze nämlich $S := \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$ für $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \varepsilon a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \varepsilon^{n-1} a_{n1} & \cdots & \varepsilon a_{n,n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Wir können daher sogar annehmen, dass

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \varepsilon N$$

ist, wobei $N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix ist, deren Norm nach oben durch eine Konstante unabhängig von ε abgeschätzt werden kann. Es ist ~~daher~~ für alle $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{Re}\,\langle Az, z\rangle \overset{\mathrm{Re}}{=} \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha_j z^j \cdot \overline{z^j} + \varepsilon \sum_{k=1}^{j-1} n_{jk} z^k \cdot \overline{z^j} \Big)$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(\alpha_j) |z^j|^2 + \varepsilon \sum_{k<j} \mathrm{Re}(n_{jk}) \cdot \overset{|z|^2}{\cancel{\tfrac{1}{2}\big(|z^k|^2 + |z^j|^2\big)}}$$

$$\le \sum_{j} \mathrm{Re}(\alpha_j) |z^j|^2 + \varepsilon c \cdot |z|^2 \le \beta |z|^2$$

mit einer von ε unabhängigen Konstanten $c > 0$ und

$$\beta := \max_{j=1}^{n} \big(\mathrm{Re}(\alpha_j)\big) + \varepsilon c.$$

Wählt man daher $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch noch $\beta < 0$ ist, so folgt mit Lemma (4.9) unmittelbar, dass

$$\| e^{tA} \| \le e^{\beta t} \longrightarrow 0, \ \cancel{\text{für}}$$

für $t \to \infty$.

$\boxed{}$

Für spätere Zwecke, die insbesondere die Stabilitätsfrage bei Gleichgewichtslagen nicht-linearer Systeme betreffen, wollen wir bemerken, dass $p=0$ für ein lineares System

$$\dot{x} = Ax,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, mit $Re(\alpha_j) < 0$ für die Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ von A, nicht nur ein globaler Attraktor ist, sondern die Bahnen $t \longmapsto x(t)$, $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, sogar alle exponentiell nach $p=0$ konvergieren,

$$|x(t)| = |e^{tA}x| \leq \|e^{tA}\|\,|x| \leq e^{t\beta}|x|,$$

wobei $0 > \beta > \max_{j=1}^{n}(Re(\alpha_j))$ ist.

Eine andere Bemerkung betrifft die Frage, ob nicht vielleicht auch im Falle, dass $Re(\alpha_j) \leq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ ist, diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Stabilität von $p=0$ ist (denn offenbar ist zumindest der Beweis von (4.10) nicht auf den Fall $Re(\alpha_j) \leq 0$ übertragbar, außer wenn A diagonalisierbar ist). Betrachten wir also den einfachsten Fall, wo also ein doppelter Eigenwert auf der imaginären Achse liegt, die geometrische Vielfachheit aber nur 1 ist,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann offenbar $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und wegen $A^2 = 0$ ist

$$e^{tA} = \mathbb{1} + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungskurve $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^2$ mit Anfang $x(0) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird damit

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das ist offenbar unbeschränkt, also $p = 0$ nicht stabil. Die Bedingung, dass alle Realteile der Eigenwerte nicht-positiv sind, ist also nicht hinreichend. (Für eine Charakterisierung siehe aber Übungsaufgabe 4, Blatt 7).

Wir wollen nun den nicht-linearen Fall betrachten und fragen, ob auch hier die asymptotische Stabilität einer Gleichgewichtslage gewährleistet ist, wenn alle charakteristischen Exponenten in der offenen linken Halbebene liegen.

Als Vorbereitung dazu wollen wir daran erinnern, dass je zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ äquivalent sind, d.h. es gibt Konstanten $C, c > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1.$$

Wir wollen weiterhin eine Aussage benutzen, die wir schon längst hätten beweisen sollen, – das besser in §1 bewiesen!

aber in §? nachholen werden — nämlich, dass ein Punkt $x \in \Omega$, dessen Lösungskurve $t \mapsto \varphi^t(x)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf Ω nach endlicher Zeit „stirbt", $t_+(x) < \infty$, zwangsläufig jedes Kompaktum $K \subseteq \Omega$ verlassen muss, d.h., es gibt ein $0 < \tau < t_+(x)$, so dass für alle $\tau < t < t_+(x)$ gilt: $\varphi^t(x) \notin K$.

Mit diesen Vorbereitungen definieren wir nun für jede Matrix $A \in Mat_n(\mathbb{R})$, die $Re(\alpha) < 0$ für alle ihre Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt, eine Norm, die dem linearen System $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$ insofern angepasst ist, als dass seine Lösungen $t \mapsto \varphi^t(x)$ nicht nur gegen $p = 0$ konvergieren, sondern dies in der betreffenden Norm sogar monoton tun.

(4.11) Definition. Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ und $Re(\alpha) < 0$ für alle Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{C}$ von A. Sei (φ^t) der Fluss zu dem linearen System $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, $\varphi^t(x) = e^{tA}x$. Die Liapunov-Norm bzgl. A auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$|x|_A^2 := \int_0^\infty |\varphi^t(x)|^2 \, dt$$

Das ist in der Tat sinnvoll, denn wir haben bereits im Anschluss an Satz (4.10) bemerkt, dass für $\beta < 0$ aber $\beta > Re(\alpha)$ für alle Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{C}$ von A gilt: $\| e^{tA} \| \leq e^{t\beta}$ für $t > 0$ und daher ist

$$\int_0^\infty |\varphi^t(x)|^2\,dt = \int_0^\infty |e^{tA}x|^2\,dt \le \int_0^\infty \|e^{tA}\|^2\,dt\cdot|x|^2$$
$$\le \int_0^\infty e^{2t\beta}\,dt\cdot|x|^2 = \frac{|x|^2}{-2\beta} < \infty,$$

also konvergent.

Nun gilt in der Tat, dass $t \longmapsto |\varphi^t(x)|_A^2$ monoton fallend ist, denn für $0<t_1<t_2$ ist

$$|\varphi^{t_2}(x)|_A^2 - |\varphi^{t_1}(x)|_A^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi^\tau(x)|^2\,d\tau > 0.$$

Weiterhin kommt $|\cdot|_A : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ auch von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also

$$|x|_A^2 = \langle x,x\rangle_A,$$

wenn man für $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle_A := \int_0^\infty \langle\varphi^t(x),\varphi^t(y)\rangle\,dt$$

setzt, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das kanonische Skalarprodukt ist. Jenes ist nämlich nach Cauchy-Schwarz für $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch definiert,

$$|\langle\varphi^t(x),\varphi^t(y)\rangle| \le |e^{tA}x|\cdot|e^{tA}y| \le \|e^{tA}\|^2|x||y|$$
$$\le e^{2\beta t}|x||y|,$$

und ist offenbar auch symmetrisch und positiv definit. Der Zusammenhang zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wird schließlich durch die positiv-definite Matrix $P\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$

gegeben,

$$\langle x,y\rangle_A = \langle Px,y\rangle_q$$

(für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$), welche durch

$$P = \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA}\, dt$$

gegeben ist. Hier bezeichnet A^* die zu A transponierte Matrix. Tatsächlich ist für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle_A = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle\, dt = \int_0^\infty \langle (e^{tA})^* e^{tA}x, y\rangle\, dt$$

$$= \langle Px, y\rangle,$$

weil $(e^{tA})^* = e^{tA^*}$ ist. Es gilt nun:

(4.12) Lemma. Für alle $A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Re}(\alpha)<0$ für alle ihre Eigenwerte α gilt:

i) $A^*P + PA = -\mathbb{1}$;

ii) für alle $x\in\mathbb{R}^n$ ist:

$$\frac{d}{dt}|x(t)|_A^2 = -|x(t)|^2.$$

Beweis. i)

$$A^*P + PA = \int_0^\infty A^* e^{tA^*} e^{tA} + e^{tA^*} e^{tA} A\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} e^{tA^*}\right) e^{tA} + e^{tA^*}\left(\frac{d}{dt} e^{tA}\right) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{tA^*} e^{tA}\right) dt = e^{tA^*}\cdot e^{tA}\Big|_0^\infty = -\mathbb{1}.$$

ii)
$$\frac{d}{dt}|x(t)|_A^2 = \frac{d}{dt}\langle Px, x\rangle = \langle P\dot{x}, x\rangle + \langle Px, \dot{x}\rangle$$
$$= \langle PAx, x\rangle + \langle Px, Ax\rangle = \langle (PA + A^*P)x, x\rangle$$
$$= -\langle x, x\rangle = -|x|^2.$$

☒

Damit können wir nun beweisen:

(4.13) Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $p \in \Omega$ eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems zu $\dot{x} = f(x)$, $f(p) = 0$. Dann gilt: Ist $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ für alle charakteristischen Exponenten $\alpha \in \mathbb{C}$ von p, ~~dann~~ so ist p ein Attraktor.

Beweis. Sei o.E. $p = 0$, Sei $A := Df(0)$ und $|\cdot|_A$ die zu A gehörende Liapunov-Norm zu A auf $\mathbb{R}^n$. Sei weiter $c > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$c|x|_A^2 \le |x|^2$$
und $\delta > 0$ so klein, dass für $\hat{f}(x) := f(x) - Ax$ auf $B_\delta(0)$ gilt:
$$|\hat{f}(x)|_A \le \frac{c}{4}|x|_A.$$
Dann ist für alle $x \in B_\delta(0)$:
$$\frac{d}{dt}|x(t)|_A^2 = \langle \dot{x}, x\rangle_A + \langle x, \dot{x}\rangle_A = \langle (PA + A^*P)x, x\rangle$$
$$+ \langle \hat{f}(x), x\rangle_A + \langle x, \hat{f}(x)\rangle_A$$

$$\leq -|x|^2 + 2\,|\hat{f}(x)|_A \cdot |x|_A \leq -c\,|x|_A^2 + \frac{c}{2}|x|_A^2$$

$$= -\frac{c}{2}|x|_A^2 .$$

Mit Gronwalls Lemma folgt

$$|x(t)|_A^2 \leq e^{-\frac{c}{4}t}\,|x|_A \longrightarrow 0,$$

für $t \to \infty$ (sogar exponentiell), also ist $p=0$ ein Attraktor.

$\boxtimes$

Umgekehrt ist es leicht einzusehen, dass ein Attraktor durchaus einen charakteristischen Exponenten auf der imaginären Achse haben kann (siehe Aufg. 2, Blatt 6). Nicht so einfach einzusehen ist allerdings, dass eine stabile Gleichgewichtslage $p \in \Omega$ eines auch nicht-linearen Systems alle charakteristischen Exponenten α in der abgeschlossenen linken Halbebene haben muss, $Re(\alpha) \leq 0$ (siehe z.B. Hirsch, Smale, Kap. 9, §2).

Liegen also etwa alle charakteristischen Exponenten auf der imaginären Achse, so kann man mit unserer bisherigen Argumenten so ziemlich gar nichts sagen: es mag ein Attraktor sein, es mag instabil sein, es mag lokal äquivalent zu seiner Linearisierung sein oder gar nichts von alledem. Man ist daher an einem Kriterium interessiert, was einem auch in dieser Situation die Stabilität der Gleichgewichtslage liefert. Ein ~~sehr~~ solches

Kriterium wird nun durch die Existenz sogenannter Liapunov-Funktionen gegeben, die in Verallgemeinerung des Begriffs des 1. Integrals auf den Lösungskurven zwar nicht konstant bleiben, aber doch immerhin nicht zunehmen sollen.

(4.14) <u>Definition</u>. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\varphi = (\varphi^t)$ das zu $\dot{x} = f(x)$ gehörende dynamische System auf Ω. Eine (stetige) Funktion $G : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt <u>Liapunov-Funktion</u> für φ, wenn für alle $x \in \Omega$ und alle $0 \leq t < t_+(x)$ gilt:

$$G(\varphi^t(x)) \leq G(x).$$

Wir sagen im Folgenden, dass eine stetige Funktion $G : \Omega \to \mathbb{R}$ in $p \in \Omega$ ein <u>striktes</u>, lokales Minimum besitzt, wenn es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von p gibt, so dass für alle $x \in U \setminus \{p\}$ gilt

$$G(x) > G(p).$$

Wir können nun formulieren.

(4.15) <u>Satz</u> (Dirichlet). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf Ω. Ist $G : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Liapunov-Funktion für φ und $p \in \Omega$ ein striktes, lokales Minimum von G, so ist p eine stabile Gleichgewichtslage von φ.

<u>Beweis</u>. Sei $\mu > 0$ so klein, dass $B_\mu(p) \subseteq \Omega$

und für alle $x \in B_\mu(p) \setminus \{p\}$ gilt: $G(x) > G(p)$. Dann muss $\varphi^t(p) = p$ für alle $0 < t < t_+(p)$ sein, denn $t \mapsto G \circ \varphi^t(p)$ müsste anwachsen, wenn die Bahn von p den Punkt verlassen will. Es ist dann notwendig $t_+(p) = \infty$ (weil die Bahn z.B. das Kompaktum $\{p\} = K$ nicht verlässt) und p eine Gleichgewichtslage.

Sei nun $0 < \varepsilon < \mu$ beliebig und

$$\alpha(\varepsilon) := \min\{G(x) : |x - p| = \varepsilon\}.$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha(\varepsilon) > 0$ und wir setzen

$$U_\varepsilon := \{x \in \Omega : G(x) < \alpha(\varepsilon)\}.$$

Dann ist also $p \in U_\varepsilon$ und damit, weil U_ε offen ist (G ist als stetig vorausgesetzt), gibt es ein $0 < \delta < \varepsilon$, so dass auch noch $B_\delta(p) \subseteq U_\varepsilon$. Für alle $x \in B_\delta(p)$ gilt aber nun, dass ihre Bahnen $\overline{B_\varepsilon(p)} = K$ nicht verlassen können, denn auf

$$S_\varepsilon(p) = \{x \in \Omega : |x - p| = \varepsilon\}$$

wäre ja G größer als auf dem Anfang x. Damit ist $t_+(x) = \infty$ und tatsächlich

$$|\varphi^t(x) - p| < \varepsilon,$$

für alle $t > 0$ und für alle $x \in B_\delta(p)$. Also ist p stabil.

$\boxtimes$

Als ein Anwendungsbeispiel wollen wir als erstes die bereits besprochene Schwingung eines Teilchens besprechen, welches neben der Federkraft auch noch einer Reibungskraft (etwa ~~etwa~~ durch den Luftwiderstand gegeben), die proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit ist. Man erhält ~~dann~~ die sogenannte <u>gedämpfte Schwingung</u>, deren Bewegung durch die Gleichung

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit Konstanten $\rho > 0$ und $\omega > 0$ beschrieben wird. Definieren wir die Energie G auf dem Phasenraum $\Omega = \mathbb{R}^2$ wie vorher durch

$$G(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

so ist zwar nun G kein 1. Integral mehr aber immerhin noch eine Liapunov-Funktion, denn

$$\frac{d}{dt} G(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x}$$
$$= \dot{x}(-\omega^2 x - \rho\dot{x} + \omega^2 x) = -\rho\dot{x}^2 \le 0.$$

Der Satz von Dirichlet zeigt also, dass $(x, \dot{x}) = (0,0)$ eine stabile Gleichgewichtslage ist, denn $(0,0)$ ist ein absolutes, striktes Minimum von G.

Allerdings hätte eine Berechnung der beiden charakteristischen Exponenten α_1, α_2 ergeben, dass ihre Realteile ~~echt~~ negativ sind, so dass uns von daher bereits klar gewesen wäre, dass $p = (0,0)$ sogar ein Attraktor ist. (Für eine Version des

Dirichletschen Satzes, der ein Kriterium für einen Attraktor liefert, siehe Aufgabe ?, Blatt ?).

Als zweites Beispiel betrachten wir dann ein sogenanntes Gradientensystem. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $V: \Omega \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (wenigstens C^2). Das zu V gehörende Gradientensystem ist dann durch

$$\dot{x} = -\operatorname{grad} V(x)$$

auf Ω gegeben, wo $\operatorname{grad} V = (D_1 V, \dots, D_n V)$ den Gradienten von V bezeichnet. Der Fluss folgt sozusagen dem steilsten Abstieg auf dem „Gebirge", was durch den Graphen von V gegeben ist. Es folgt nun, dass $G = V$ selbst eine Liapunov-Funktion ist, denn

$$\frac{d}{dt} V(\varphi^t(x)) = \langle \operatorname{grad} V(\varphi^t(x)), \frac{d\varphi^t}{dt}(x) \rangle$$

$$= - \langle \operatorname{grad} V(\varphi^t(x)), \operatorname{grad} V(\varphi^t(x)) \rangle$$

$$= - |\operatorname{grad} V|^2(\varphi^t(x)) \leq 0,$$

also $t \mapsto V(\varphi^t(x))$ monoton fallend ist. Ist also etwa $p \in \Omega$ ein absolutes striktes Minimum von V, so ist also $p = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage. Eine Analyse der charakteristischen ~~Kre~~ Exponenten von $p = 0$ führt hier auf die Eigenwerte der Hesse-Matrix von V, denn die Jacobi-Matrix des Vektorfeldes $f = -\operatorname{grad}(V)$ ist offenbar gerade

$$-\mathrm{Hess}\,V(p) = \left(-D_iD_j V(p)\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Weil diese symmetrisch ist, sind notwendig alle charakteristischen Exponenten von p reell und wenn p ein lokales Minimum ist, so müssen diese reellen Zahlen alle nicht-positiv sein, $Re(\lambda)\le 0$. Es könnten aber durchaus einige davon gleich Null sein – ja sogar $\mathrm{Hess}\,V(p)=0$ – und dann würde die Analyse der charakteristischen Exponenten keine Aussage über die Stabilität der Gleichgewichtslage $p=0$ liefern. Der Satz von Dirichlet dagegen ist anwendbar.

§5. Räuber-Beute-Modelle (und ein Exkurs in die singuläre Störungstheorie), von Th. Hillen

siehe ...

§6. Limesmengen

In einem dynamischen System $\varphi=(\varphi^t)$ auf einem Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ spielen die asymptotisch stabilen Gleichgewichtslagen eine besondere Rolle schon deshalb, weil sie für eine offene Menge von An-