$$-\operatorname{Hess} V(p) = \left(-D_i D_j V(p)\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Weil diese symmetrisch ist, sind notwendig alle charakteristischen Exponenten von p reell und wenn p ein lokales Minimum ist, so müssen diese reellen Zahlen aller nicht-positiv sein, $\operatorname{Re}(\alpha) \le 0$. Es könnten aber durchaus einige davon gleich Null sein – ja sogar $\operatorname{Hess} V(p) = 0$ – und dann würde die Analyse der charakteristischen Exponenten keine Aussage über die Stabilität der Gleichgewichtlage $p = 0$ liefern. Der Satz von Dirichlet dagegen ist anwendbar.

§5. Räuber-Beute-Modelle (und ein Exkurs in die singuläre Störungstheorie), von Th. Hillen

siehe ...

§6. Limesmengen

In einem dynamischen System $\varphi = (\varphi^t)$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ spielen die asymptotisch stabilen Gleichgewichtlagen eine besondere Rolle schon deshalb, weil sie für eine offene Menge von Anfangsdaten sozusagen den Endzustand des Systems beschreiben und damit, denkt man bei dem dynamischen System z.B. an ein Modell zur Beschreibung eines physikalischen Gesetzes, physikalisch realistisch ist. Eine Gleichgewichtslage, deren charakteristische Exponenten sämtlich einen positiven Realteil haben (eine so genannte Quelle), ist physikalisch unrealistisch, weil die kleinste Störung der Anfangslage das System unweigerlich in einen anderen Zustand bringt. Man denke z.B. an die instabile Gleichgewichtslage beim nichtlinearen Pendel. Ähnlich verhält es sich bei Gleichgewichtslagen, die hyperbolisch sind, also alle charakteristischen Exponenten nicht auf der imaginären Achse liegen, einige davon in der rechten Hälfte der Gaußschen Zahlenebene, andere in der linken. (Sind alle Eigenwerte zudem reell, so spricht man von einem Sattel.) Ist wenigstens ein Eigenwert in der rechten Halbebene (sonst spricht man von einer Senke, welche wir wir bereits wissen, ein exponentiell anziehender Attraktor ist), so gibt es hier nur eine niederdimensionale Untermannigfaltigkeit (die so genannte stabile Untermannigfaltigkeit) von Anfangslagen, deren Bahn für $t \to \infty$ zum hyperbolischen Punkt hinzieht und damit ist auch dieser „Endzustand" unphysikalisch.

Im letzten Paragraphen (§5) haben wir nun Systeme kennengelernt, die periodische Bahnen $\gamma \subseteq \Omega$ besitzen, die realistische Endzustände sind in dem Sinne, dass es eine nicht-leere, offene Teilmenge $U \subseteq \Omega$ gibt, so dass für alle Anfangslagen $x \in U$ die Bahn gegen die periodische konvergiert, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi^t(x), \gamma) = 0,$$

wo $d(y,\gamma)$ den Abstand zu der kompakten Menge γ beschreibt,

$$d(y,\gamma) = \min\{|y-z| : z\in\gamma\}.$$

Wir wollen in diesem Paragraphen nun zunächst allgemeiner fragen, wie denn die *Limesmenge* einer Bahn überhaupt aussehen kann. Später werden wir für *ebene Systeme*, d.h. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, ein nützliches Kriterium angeben, welches sichert, dass die Limesmenge einer Bahn ein periodischer Orbit ist und damit überhaupt erst die Existenz periodischer Bahnen beweist.

Wiederholen wir zunächst die grundlegenden Begriffsbildungen. Ein *periodischer Punkt* eines dynamischen Systems $\varphi=(\varphi^t)$ auf Ω ist ein Punkt $p\in\Omega$, für den es ein $0<T<t_+(p)$ gibt, so dass

$$\varphi^T(p)=p$$

ist. Wir vereinbaren, dass wir eine Gleichgewichtslage nicht periodisch nennen. Das kleinste $T>0$, für das dann $\varphi^T(p)=p$ gilt, heißt dann die *Periode* von p. Die Lebensdauer $I(p)=(t_-(p),t_+(p))$ eines periodischen Punktes ist wie im Falle von

Gleichgewichtslagen ewig, d.h. $I(p)=\mathbb{R}$, denn für alle $0<t<t_+(p)-T$ ist

$$\varphi^{t+T}(p)=\varphi^t(\varphi^T(p))=\varphi^t(p),$$

und damit bleibt die Kurve $[0,t_+(p))\longrightarrow\Omega,\ t\mapsto\varphi^t(p)$ in der kompakten Menge

$$\gamma=\{\varphi^t(p):\ 0\le t\le T\},$$

was, wie wir wissen, $t_+(p)=\infty$ impliziert. Ähnlich sieht man ein, dass $t_-(p)=-\infty$ ist und schließlich

$$\varphi^{t+T}(p)=\varphi^t(p)$$

für alle $t\in\mathbb{R}$ gültig ist.

Weiter bezeichnen wir für jedes $x\in\Omega$ die Teilmenge

$$\gamma(x)=\{\varphi^t(x):\ 0\le t<t_+(x)\}\subseteq\Omega$$

als die Bahn von x (oder den Orbit von x). (Manchmal wird dies auch als die positive Halbbahn bezeichnet. In dieser Bezeichnung wäre dann $\{\varphi^t(x):\ t_-(x)<t<t_+(x)\}$ die Bahn und $\{\varphi^t(x):\ t_-(x)<t\le 0\}$ die negative Halbbahn. Wir vereinbaren hier, uns hauptsächlich „für die Zukunft" zu interessieren.) Die Bahn einer Gleichgewichtslage ist also einpunktig. Die Bahn eines periodischen Punktes ist immerhin noch kompakt. Wir nennen die Bahn

eines Punktes $p \in \Omega$ geschlossen, wenn p ein periodischer Punkt ist. Ist $T > 0$ die Periode des Punktes, so ist also in diesem Fall

$$\gamma(p) = \{ \varphi^t(p) : 0 \le t \le T \}.$$

Die nächste Definition beschreibt nun präzise, was wir unter dem „Limes einer Bahn" verstehen wollen.

(6.1) Definition. Sei $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$. Wir nennen nun $y \in \Omega$ einen ω-Limespunkt von x, wenn es eine Folge $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $0 \le t_j < t_+(x)$ gibt, so dass $(t_j) \longrightarrow t_+(x)$ konvergiert und $(\varphi^{t_j}(x)) \longrightarrow y$. Die Menge $\omega(x)$ aller ω-Limespunkte von x heißt die ω-Limesmenge von x,

$$\omega(x) = \{ y \in \Omega \mid \exists (t_j) \to t_+(x) : (\varphi^{t_j}(x)) \to y \}.$$

Betrachtet man Folgen (t_j) mit $(t_j) \to t_-(x)$ und die zugehörigen Häufungspunkte von $(\varphi^{t_j}(x))$, so spricht man von der α-Limesmenge $\alpha(x)$ (in Übereinstimmung mit der Tradition, dass α den Anfang und ω das Ende symbolisiert).

Unsere erste Beobachtung ist nun die, dass $\omega(x) = \emptyset$ ist, wenn $t_+(x) < \infty$ ist. Tatsächlich wissen wir ja dann, dass die Bahn $[0, t_+(x)) \to \Omega$,

$t \mapsto \varphi^t(x)$ jedes Kompaktum verlässt und zum Rand des Definitionsbereiches oder nach Unendlich zieht. Für jede Folge $(t_j) \to t_+(x)$ kann deshalb $(\varphi^{t_j}(x))$ keinen Häufungspunkt (in Ω) haben. Aber auch wenn $t_+(x) = \infty$ ist, kann $\omega(x)$ durchaus leer sein. Man denke z.B. an das konstante Vektorfeld $f(x) = c \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, für das $\omega(x) = \emptyset$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Oder auch an $\dot{x} = x$ im $\mathbb{R}^n$, für das $\omega(x) = \emptyset$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ist dagegen $p \in \Omega$ eine Gleichgewichtslage, so ist offenbar

$$\omega(p) = \{p\} = \gamma(p),$$

und auch im periodischen Fall ist

$$\omega(p) = \gamma(p),$$

denn $\mathbb{R} \to \Omega$, $t \mapsto \varphi^t(p)$ durchläuft ja $\gamma(p) = \gamma$ wieder und wieder.

Um nun die ersten Eigenschaften einer ω-Limesmenge nachzuweisen, können wir also o.E. annehmen, dass $t_+(x) = \infty$ ist und wir notieren dann für jedes $0 \leq \tau < \infty$ mit

$$\Gamma_\tau = \{\varphi^t(x) : \tau \leq t < \infty\} \subseteq \gamma(x)$$

das <u>Endstück</u> von $\gamma(x) = \Gamma_0$ ab dem Zeitpunkt τ.

Für jede Teilmenge $M \subseteq \Omega$ bezeichnen wir weiter mit $\overline{M}$ den <u>Abschluss von M in Ω</u>, also alle Punkte $y \in \Omega$, so dass es eine Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in M gibt, die gegen y konvergiert.

$\bar{M}$ ist dann die kleinste abgeschlossene Menge in Ω, die M enthält.

Wir behaupten nun, dass

$$\omega(x) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\Gamma_\tau} \qquad (1)$$

ist. Ist nämlich $y \in \omega(x)$, also $y = \lim_{j\to\infty} \varphi^{t_j}(x)$ für eine Folge $(t_j) \to \infty$, und ist $\tau \geq 0$ beliebig, so gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $t_j \geq \tau$ ist, für alle $j \geq j_0$. Die Folge

$$(\varphi^{t_j}(x))_{j \geq j_0}$$

ist dann in Γ_τ und daher $y \in \overline{\Gamma_\tau}$. Also ist $y \in \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\Gamma_\tau}$.

Ist umgekehrt $y \in \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\Gamma_\tau}$, so also insbesondere in $\overline{\Gamma_j}$ für $j \in \mathbb{N}$. Wähle für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $t_j \geq j$, so dass

$$|\varphi^{t_j}(x) - y| < \frac{1}{j}$$

ist. Dann ist offenbar $(t_j) \to \infty$ und $(\varphi^{t_j}(x)) \to y$, also $y \in \omega(x)$.

Wir nennen weiterhin eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ (positiv) invariant, wenn für alle $x \in \Omega$ auch die Bahn von x in Ω liegt, $\gamma(x) \subseteq \Omega$. Wir zeigen nun, dass aus der Beschreibung (1) für die ω-Limesmenge $\omega(x)$ folgt:

(6.2) Bemerkung. Für jedes $x \in \Omega$ ist seine ω-Limesmenge $\omega(x)$ abgeschlossen und invariant.

__Beweis.__ Weil $\overline{\Gamma_\tau} \subseteq \Omega$ abgeschlossen ist und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, zeigt (1) offenbar, dass $\omega(x)$ abgeschlossen ist.

Ist $y \in \omega(x)$ und $0 \leq s < t_+(y)$, so ist mit $y \in \overline{\Gamma_\tau}$ auch $\varphi^s(y) \in \overline{\Gamma_{\tau+s}}$, denn ist $y = \lim_{j\to\infty} \varphi^{t_j}(x)$ mit $t_j \geq \tau$ und $(t_j) \longrightarrow \infty$, so ist

$$\varphi^s(y) = \lim_{j\to\infty} \varphi^{s+t_j}(x).$$

Also ist

$$\varphi^s(y) \in \bigcap_{\tau \geq s} \overline{\Gamma_\tau}.$$

Weil aber für $s < t$ offenbar $\Gamma_s \supseteq \Gamma_t$ und daher auch $\overline{\Gamma_s} \supseteq \overline{\Gamma_t}$ liegt, ist

$$\omega(x) = \bigcap_{\tau \geq s} \overline{\Gamma_\tau}$$

für jedes $s \geq 0$. Also ist $\varphi^s(y) \in \omega(x)$ für $0 < s < t_+(y)$ und damit $\omega(x)$ invariant.

$\boxtimes$

Eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ heißt __relativ-kompakt__, wenn ihr Abschluss $\overline{M} \subseteq \Omega$ kompakt ist. Das bedeutet, dass M beschränkt sein muss und positiven Abstand zum Rand von Ω haben muss.

Eine abgeschlossene Teilmenge A einer kompakten Menge K ist notwendig selbst kompakt.

Wir können nun formulieren:

(6.3) __Satz.__ Sei $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, und $x \in \Omega$. Ist die Bahn $\Gamma(x) \subseteq \Omega$ relativ-kompakt, so gilt:

(a) $\omega(x)$ ist nicht leer;

(b) $\omega(x)$ ist kompakt;

(c) $\omega(x)$ ist zusammenhängend.

Beweis. (b) Da $\overline{\Gamma}_0 = \overline{\Gamma(x)}$ nach Voraussetzung kompakt ist und $\omega(x) \subseteq \overline{\Gamma}_0$ eine abgeschlossene Teilmenge, ist $\omega(x)$ also kompakt.

(a) Sei $x_j = \varphi^{t_j}(x)$ für $j \in \mathbb{N}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass (x_j) konvergiert, denn $(x_j) \subseteq \overline{\Gamma}_0$, welches kompakt ist. Aber $y = \lim_{j\to\infty}(x_j)$ liegt dann in jedem $\overline{\Gamma}_\tau$, denn $j \geq \tau$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$. Also ist $y \in \bigcap \overline{\Gamma}_\tau = \omega(x)$.

(c) Nehmen wir an, dass $\omega_1, \omega_2 \subseteq \omega(x)$ abgeschlossen sind, disjunkt und $\omega(x) = \omega_1 \cup \omega_2$ ist. Wir müssen zeigen, dass eine von beiden leer ist. Da $\omega_1, \omega_2 \subseteq \omega(x)$ abgeschlossen sind und $\omega(x)$ kompakt ist, ist der Abstand zwischen ω_1 und ω_2 echt positiv,

$$\inf\{|y_1 - y_2| : y_1 \in \omega_1, y_2 \in \omega_2\} > 0.$$

Daher gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \Omega$ mit $U_1 \supseteq \omega_1$, $U_2 \supseteq \omega_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Setzt man nun $U = U_1 \cup U_2$, so muss ein Endstück Γ_τ von $\Gamma(x)$ für $\tau > 0$ groß genug in U liegen, denn andernfalls hätte man eine Folge $(t_j) \to \infty$ mit $\varphi^{t_j}(x) \notin U$. Da aber $x_j := \varphi^{t_j}(x) \in \overline{\Gamma}_0$ ist, welches kompakt ist, darf man annehmen, dass (x_j) konvergiert, $(x_j) \longrightarrow y$, also $y \in \omega(x)$. Aber $x_j \notin U$ für j groß und U ist eine Umgebung von $\omega(x)$: Widerspruch!

Nun zerlegt aber $I_k := \{t \geq \tau : \varphi^t(x) \in \cancel{\overline{}}\, U_k\}$ $(k = 1,2)$ das zusammenhängende Intervall $I = [\tau, \infty)$,

$$I = I_1 \,\dot{\cup}\, I_2$$

und daher muss eines leer sein, sagen wir I_2. Aber dann ist auch $\omega_2 = \emptyset$ und $\omega(x)$ also zusammenhängend.

$\boxtimes$

So weit die allgemeinen topologischen Eigenschaften von Limesmengen. Will man nun ~~konkret~~ eine Limesmenge ausrechnen, so erweist sich erneut die Existenz einer (stetigen) Liapunov-Funktion als sehr geschätztes Hilfsmittel. Es gilt nämlich:

(6.4.) Satz. Sei $\varphi = (\varphi^t)$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $G : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Liapunov-Funktion, die nach unten beschränkt ist. Sei $x \in \Omega$. ~~so dass $\omega(x)$ nicht leer ist~~. Dann gilt:

(a) Es gibt ein $\beta \in \mathbb{R}$, so dass $\omega(x) \subseteq G^{-1}(\beta)$ ist;

(b) für alle $y \in \omega(x)$ und $0 < t < t_+(y)$ gilt:

$$G(\varphi^t(y)) = G(y).$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $\omega(x) \neq \emptyset$ ist, sonst ~~wählen wir ein $\beta < \inf G$ und~~ sind (a) ~~ist~~ und (b) trivialerw. richtig. ~~(b) sowieso~~.

(a) Da $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto G(\varphi^t(x))$ nun monoton fallend und nach unten beschränkt ist, existiert

$$\beta := \lim_{t\to\infty} G(\varphi^t(x)).$$

Ist nun $y \in \omega(x)$ beliebig, also $y = \lim_{j\to\infty} \varphi^{t_j}(x)$ für eine Folge (t_j) mit $(t_j) \to \infty$, so ist

$$G(y) = G\left(\lim_{j\to\infty} \varphi^{t_j}(x)\right) = \lim_{j\to\infty} G(\varphi^{t_j}(x)) = \beta.$$

(b) Das folgt unmittelbar aus (a), denn $\omega(x)$ ist invariant!

$\boxtimes$

Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir das System, welches durch die Gleichung

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \sin x = 0 \quad , \quad \mu > 0$$

auf $\mathbb{R}$ gegeben ist. Es beschreibt die Bewegung eines <u>gedämpften Pendels</u>. ($\mu > 0$ wird als <u>Dämpfungskonstante</u> bezeichnet.) Es ist nun $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$G(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x$$

zwar wie im ungedämpften Fall ($\mu = 0$) kein 1. Integral mehr, aber immerhin noch eine Liapunov-Funktion, denn

$$\frac{d}{dt} G(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}\ddot{x} + \sin x \cdot \dot{x} = \dot{x}(-\mu\dot{x} - \sin x + \sin x)$$
$$= -\mu\dot{x}^2 \le 0.$$

Wegen Teil (b) in Satz (6.4) folgt nun für ein $(y,\dot y) \in \omega(x,\dot x)$, dass

$$\frac{d}{dt} G(y(t),\dot y(t)) = 0$$

sein muss, also $\dot y(t) = 0$. Dann ist auch $\ddot y(0) = 0$ und Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert, dass $\sin(y) = 0$, also $y \in \mathbb{Z}\pi$ sein muss. Jeder ω-Limespunkt von x muss daher eine Gleichgewichtslage $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sein, und weil diese diskret liegen, sieht man (wenn man sich auch noch klar gemacht hat, dass $\gamma(x,\dot x) \subseteq \mathbb{R}^2$ relativkompakt ist), dass $\omega(x)$ einpunktig ist, für jedes $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega(x) = \{(k\pi, 0)\},$$

für ein $k = k(x) \in \mathbb{Z}$.

Ein weiteres Beispiel wird durch die Gradientensysteme geliefert. Ist $V : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und nach unten beschränkt, so erfüllt V die Voraussetzungen von Satz (6.4) für das System

$$\dot x = -\operatorname{grad} V(x)$$

auf Ω, denn

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -|\operatorname{grad} V(x)|^2 \leq 0 .$$

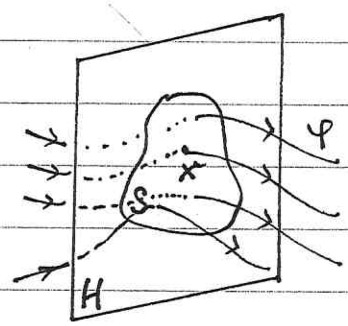
Auch hier ist also wie beim gedämpften Pendel ein ω-Limespunkt y von x notwendig eine Gleichgewichtslage, denn aus

$d/dt\, V(\gamma(t)) = 0$ folgt: $\operatorname{grad} V(y) = 0$. Insbesondere hat ein Gradientensystem keine periodischen Bahnen.

Wir führen nun folgende Begriffsbildung ein. Ist $x \in \Omega$ ein Punkt in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, auf welchem ein dynamisches System $\varphi = (\varphi^t)$ zu einem C^1-Vektorfeld $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist, und ist x keine Gleichgewichtslage von φ, $f(x) \neq 0$, so betrachten wir eine Hyperebene

$$H = \{ y \in \mathbb{R}^n : s(y) = 0 \},$$

d.h. $s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist linear und $s \neq 0$, so dass $f(x) \notin H$ ist. Ist nun $S \subseteq x + H = \{ x + y : y \in H \}$ eine Umgebung von x in der affinen Hyperebene $x + H$, so dass $f(y) \notin H$ ist, für alle $y \in S$, so sagen wir, dass S transversal zu φ liegt.



Nach einer eventuellen Verkleinerung von S können wir dann einen Diffeomorphismus von

$$\mathcal{U} := (-\sigma, \sigma) \times B_\delta^{n-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$B_\delta^{n-1}(0) = \{ y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y'| < \delta \}$, auf eine Umgebung

$V \subseteq \Omega$ von x finden, $\Phi : \mathcal{U} \to V$, derart, dass Φ den linearen Fluss

$$\psi^t(y) = (y^1 + t, y^2, \ldots, y^n)$$

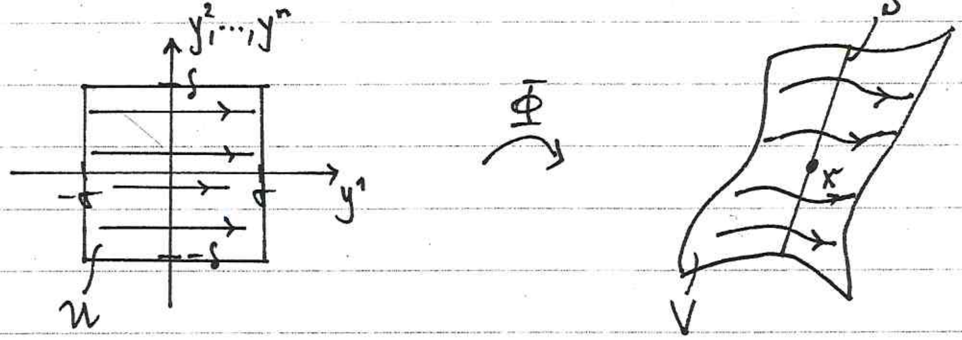
gerade in den Fluss (φ^t) überführt,

$$\varphi^t(\Phi(y)) = \Phi(y^1 + t, y^2, \ldots, y^n)$$

und außerdem

$$\Phi(\{0\} \times B_\delta^{n-1}(0)) = S$$

erfüllt (vgl. Satz (4.2)).



Ist diese Situation gegeben, so nennen wir $S \subseteq \Omega$ einen lokalen Schnitt an φ (oder eine lokale Scheibe an φ) und $V \subseteq \Omega$ eine Fluss-Box für φ in Ω.

Als nächstes betrachten wir eine abzählbare Menge I, d.h. $I = \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{N}$, und eine Folge $(x_j)_{j \in I}$ auf einer Bahn $C = \gamma(x) \subseteq \Omega$, $x \in \Omega$. Wir sagen, dass (x_j) monoton auf C liegt, wenn $x_j = \varphi^{t_j}(x)$ und

$$t_j < t_{j+1}$$

für alle $j \in I$ (d.h. für $j = \{1, \dots, n-1\}$, falls $I = \{1, \dots, n\}$ ist) ist.

Ist nun speziell $n = 2$ und $(x_j)_{j \in I}$ eine Folge auf einem lokalen Schnitt

$$S = \Phi(\{0\} \times (-\delta, \delta)),$$

$x^j = \Phi(0, s_j)$, $j \in I$, so sagen wir, dass (x_j) monoton auf S liegt, wenn $(s_j) \subseteq (-\delta, \delta)$ monoton (wachsend oder fallend) ist.

Ab hier betrachten wir bis zum Ende des Paragraphen nur noch ebene dynamische Systeme φ, d.h. $\varphi = (\varphi^t)$ ist ein dynamisches System auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Es gilt nun das grundlegende

(6.5) Lemma. Sei $S \subseteq \Omega$ ein lokaler Schnitt für φ und $C = \gamma(x)$ eine Bahn von φ. Sind nun $x_1, x_2, x_3 \in C \cap S$ derart, dass (x_1, x_2, x_3) monoton auf C liegt und zwischen x_1 und x_2 ~~liegt~~ auf C kein weiterer Punkt von C auf S ~~liegt~~ ist, so liegt auch (x_1, x_2, x_3) monoton auf S.

Beweis. Sei also $x_j = \varphi^{t_j}(x)$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und $x_j = \Phi(0, s_j)$, $j = 1, 2, 3$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $s_1 < s_2$ ist. (Die Argumentation für $s_1 > s_2$ verläuft analog.) Wir haben dann zu zeigen, dass $s_2 < s_3$ ist.

und der Fall $s_1 = s_2$ ist trivial

Wir setzen nun

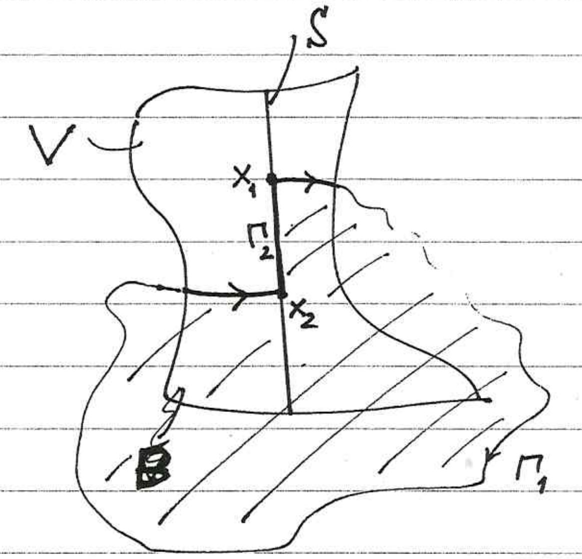
$$\Gamma_1 := \{\varphi^t(x) : t_1 \leq t < t_2\} \subseteq C$$

$$\Gamma_2 = \{\Phi(0,s) : s_1 < s \le s_2\} \subseteq S.$$

Weil zwischen zwischen x_1, x_2 auf S kein weiterer Durchstoßpunkt von Γ_1 mit S existiert (nach Voraussetzung ist $\Gamma_1 \cap S = \{x_1\}$), ist

$$\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

eine einfach geschlossene Kurve (in $\mathbb{R}^2$). Wir wissen nun zwar nichts darüber, wie „wild" Γ außerhalb ~~der~~ einer zu S gehörenden Fluss-Box V aussieht, innerhalb von V besteht Γ aber aus drei aneinander gesetzten Stücken, die übersichtlich sind.



Der berühmte Jordansche Kurvensatz, den wir jetzt gebrauchen wollen, weil er naiv sehr einleuchtend ist, und der präzise in einer Topologievorlesung bewiesen wird,(*) besagt, dass die offene Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht: einer unbeschränkten und einer beschränkten Komponente,

(*) siehe z.B. Stöcker/Zieschang: Alg. Topologie die wir mit B bezeichnen wollen (so wird Γ auch sein mag).

und Γ ist der gemeinsame Rand beider Komponenten.

Wir sagen nun im Folgenden für einen Punkt $y \in \Gamma_2$, dass der Fluss φ in B hineinzeigt, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\varphi^t(y) \in B$ ist, für alle $0 < t < \varepsilon$. Entsprechend sagen wir, dass der Fluss in $y \in \Gamma_2$ aus B hinauszeigt, wenn $\varphi^t(y) \notin B$ ist, für $0 < t < \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ klein genug. Für jedes $y \in \Gamma_2$ trifft nun eine der beiden Alternativen zu, denn y liegt auf dem Randstück Γ_2 von B und der Fluss ist transversal zu Γ_2. Wir behaupten nun, dass für alle $y \in \Gamma_2$ sogar die gleiche Alternative zutrifft. Es ist nämlich

$$\Gamma_2' = \{ y \in \Gamma_2 : \varphi \text{ zeigt in } y \text{ nach } B \text{ hinein} \}$$

offen in Γ_2, aber auch

$$\Gamma_2'' = \{ y \in \Gamma^2 : \varphi \text{ zeigt in } y \text{ aus } B \text{ heraus} \}$$

ist offen in Γ_2. Es ist also $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cup \Gamma_2''$ eine offene Zerlegung des zusammenhängenden Γ_2. Also ist entweder $\Gamma_2' = \emptyset$ oder $\Gamma_2'' = \emptyset$. Sagen wir, dass φ bei x_2 nach B hineinzeigt. ~~Die Diskussion des anderen Falls verläuft analog.~~ Dann können wir den wichtigen Schluss machen, dass das gesamte Gebiet $B \cap \Omega$ invariant unter dem Fluss ist, denn eine Bahn $\gamma(y) \subseteq \Omega$ mit $y \in B$ könnte das Gebiet $B \cap \Omega$ nur dann verlassen, wenn $\gamma(z) \cap \Gamma \neq \emptyset$ ist, was aber nicht der Fall ist, weil Γ_1 selbst Teil einer

Bahn ist und der Fluss bei jedem $y \in \Gamma_2$ nach B hineinzeigt. (Im Falle, dass φ bei x_2 aus B herauszeigt, ist die unbeschränkte Komponente invariant.)

Aber nun sind wir fast ~~fertig~~. Zerlegt man nämlich nun den lokalen Schnitt $S = \Phi(\{0\} \times (-\delta, \delta))$ in die drei disjunkten Abschnitte

$$S_1 = \{ \Phi(0,s) : -\delta < s < s_1 \},$$
$$\{x_1\} \cup \Gamma_2 = \{ \Phi(0,s) : s_1 \leq s \leq s_2 \},$$
$$S_2 = \{ \Phi(0,s) : s_2 < s < \delta \},$$

so ist klar, dass $S_1 \subseteq$ ~~$\mathbb{R}^2 \setminus (B \cup \Gamma)$~~ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ und $S_2 \subseteq B$ ist. Insbesondere ist nun

$$x_3 = \varphi^{t_3}(x) = \varphi^{t_3 - t_2 - \varepsilon}(\varphi^{\varepsilon}(x_2))$$

Element in $S \cap B = S_2$, denn für $\varepsilon > 0$ klein genug ist $\varphi^{\varepsilon}(x_2) \in B$, also auch $x_3 \in B$. Also ist $x_3 = \Phi(0, s_3)$ mit $s_3 > s_2$ und das Lemma bewiesen.

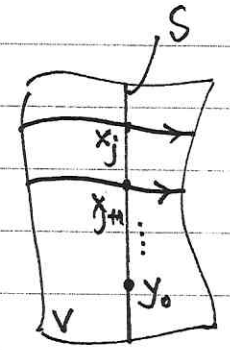
$\boxtimes$

(6.6) Korollar. Sei $S \subseteq \Omega$ ein lokaler Schnitt und $x \in \Omega$. Es enthält dann $\omega(x) \cap S$ höchstens einen Punkt.

Beweis. Die Menge $\gamma(x) \cap S$ ist sicher diskret in S und damit abzählbar (endlich oder unendlich). Wir nummerieren sie so durch, dass mit

$$\gamma(x) \cap S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

$(x_j)_{j\in I}$ monoton auf $C = \gamma(x)$, aber mit dem Lemma damit auch monoton auf $S = \Phi(\{0\}\times(-\delta,\delta))$ liegt, $x_j = \Phi(0, s_j)$ mit (s_j) monoton. Weil $(s_j) \subseteq (-\delta,\delta)$ aber nun höchstens einen Häufungspunkt in $(-\delta,\delta)$ haben kann hat $\gamma(x)\cap S$ höchstens einen Häufungspunkt $y_0 \in S$.



Ist andererseits $y \in \omega(x)$ beliebig, also $y = \lim_{k\to\infty} \varphi^{t_k}(x)$ für eine Folge $(t_k)\to\infty$, so dürfen wir zunächst annehmen, dass alle $z_k = \varphi^{t_k}(x)$ in einer Flussbox V um S liegen. Aber dann dürfen wir nach eventueller Abänderung von t_k (um $s_k \in (-\sigma,\sigma)$) auch annehmen, dass $z_k \in C\cap S$ liegt und damit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_j) ist. Aus diesem Grund muss dann $y = y_0$ sein.

$V = \Phi((-\sigma,\sigma)\times(-\delta,\delta))$

$\boxtimes$

Nun können wir das Hauptresultat dieses Paragraphen beweisen.

(6.7) Satz (Poincaré-Bendixson). Sei $\omega(x)$

eine ω-Limesmenge eines dynamischen Systems auf einem ebenen Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Ist $\omega(x) \neq \emptyset$, kompakt und ohne Gleichgewichtslagen, so ist $\omega(x)$ eine geschlossene Bahn.

Beweis. 1. Sei $y \in \omega(x)$. Wir behaupten, dass $\gamma(y)$ geschlossen sein muss.

Zunächst ist mit $y \in \omega(x)$ auch $\gamma(y) \subseteq \omega(x)$ und wegen $\omega(y) \subseteq \overline{\gamma(y)} \subseteq \overline{\omega(x)}$ auch $\omega(y) \subseteq \omega(x)$, denn $\omega(x) \subseteq \Omega$ ist abgeschlossen (vgl. (6.2)). Da $\omega(x)$ nach Voraussetzung kompakt ist, ist $\overline{\gamma(y)} \subseteq \omega(x)$ auch kompakt und damit nach Satz (6.3) $\omega(y)$ auch nicht leer. Wir wählen nun ein $z \in \omega(y)$ und einen lokalen Schnitt $S \subseteq \Omega$ mit $z \in S$ und Fluss-Box $V \subseteq \Omega$, denn nach Voraussetzung ist $z \in \omega(y) \subseteq \omega(x)$ keine Gleichgewichtslage. Ist nun $z = \lim_j (y_j)$ für $y_j = \varphi^{t_j}(y)$, so dürfen wir wieder wie im Beweis von (6.6) annehmen, dass $y_j \in S$ für $j \in \mathbb{N}$ ist. Aber (6.6) sagt, dass $\omega(y) \cap S$ höchstens einpunktig ist, was also zu $y_j = z$ für alle $j \in \mathbb{N}$ führt. Die Bahn ist also wegen $y_1 = y_2$ geschlossen.

2. Sei nun $\gamma \subseteq \omega(x)$ eine geschlossene Bahn und S ein lokaler Schnitt an einem Punkt $y \in \gamma$. Wenn x nicht selber schon periodisch war (in diesem Fall ist der Satz offenbar richtig), so gibt es also wieder Punkte $x_j \in C := \gamma(x)$, $j \in \mathbb{N}$, in aufsteigender Reihenfolge, so dass

$$C \cap S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

ist. Ist $x_j = \varphi^{t_j}(x)$, so behaupten wir nun, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$t_{j+1} - t_j < C. \qquad (2)$$

Sei dazu $T > 0$ die Periode von y. Weil φ^T stetig ist und (x_j) ~~→~~ y konvergiert, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq j_0$ gilt gegen

$$|\varphi^T(x_j) - y| = |\varphi^T(x_j) - \varphi^T(y)| < \sigma,$$

wo $\sigma > 0$ die Breite einer Fluss-Box $V = \Phi((-\sigma,\sigma) \times (-\delta,\delta))$ sei. Aber dann gibt es auch ein $s_j \in (-\sigma,\sigma)$, so dass $\varphi^{T+s_j}(x_j) \in S$ ist, denn $\varphi^T(x_j)$ ist ja nun in V. Weil aber $x_{j+1} = \varphi^{t_{j+1}-t_j}(x_j)$ der nächste Durchstoßpunkt nach x_j von C durch S ist, haben wir, dass

$$t_{j+1} - t_j \leq T + s_j < T + \delta$$

ist, für alle $j \geq j_0$. Daraus folgt die Abschätzung (2).

3.[2] Sei $\gamma \subseteq \omega(x)$ beliebige geschlossene Bahn. Wir behaupten, dass für den Abstand von $\varphi^t(x)$ nach γ, also

$$d(\varphi^t(x), \gamma) = \min\{|\varphi^t(x) - y| : y \in \gamma\}$$

gilt:

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi^t(x), \rho) = 0.$$

Es ist klar, dass daraus dann folgt, dass $\omega(x) = \rho$ ist, also $\omega(x)$ aus nur einer einzigen geschlossenen Bahn besteht.

Sei dazu wiederum $y \in \rho$ und $x_j \in \rho(x) \cap S$ wie in Schritt 2, $j \in \mathbb{N}$, monoton und

$$\rho(x) \cap S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Sei weiter $C > 0$ so, dass für $x_j = \varphi^{t_j}(x)$ gilt: $t_{j+1} - t_j < C$.

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so können wir wegen der Stetigkeit von φ ein $\mu > 0$ finden, so dass

$$|\varphi^t(z) - \varphi^t(y)| < \varepsilon$$

ist, und zwar für alle $0 \le t \le C$ und alle $|z - y| \le \mu$, denn φ ist z.B. auf dem Kompaktum $[0, C] \times [-f, +f]$ (für eine Wahl von f) gleichmäßig stetig. Es gibt daher ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \ge j_0$ und für $0 \le t \le C$ gilt

$$|\varphi^t(x_j) - \varphi^t(y)| < \varepsilon,$$

denn $(x_j) \to y$. Setzt man nun $t_0 := t_{j_0}$, so gilt für alle $t \ge t_0$ folgendes: man wähle zunächst $j \ge j_0$ so, dass

$$t_j \le t \le t_{j+1}$$

gilt und schließe nun, dass

$$d(\varphi^t(x), p) \leq |\varphi^t(x) - \varphi^{t-t_j}(y)| = |\varphi^{t-t_j}(x_j) - \varphi^{t-t_j}(y)| < \varepsilon$$

ist, denn $0 \leq t - t_j \leq C$. Also ist

$$\lim_{t\to\infty} d(\varphi^t(x), p) = 0$$

und der Satz bewiesen.

$\blacksquare$

§7. Himmelsmechanik

Wir haben in §3 das Schwerefeld der Sonne $G_S : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ besprochen, was so viel bedeutete, dass die Sonne, lediglich durch ihre (schwere) Masse $m_S > 0$, an jedem Ort $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ auf einen (punktförmig gedachten) Körper der Masse $m > 0$ eine Kraft $F = m G_S$ ausübt. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist dann die Bewegung des Körpers durch die Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = m G_S(x)$$

gegeben. Wir hatten aus den Keplerschen Gesetzen auch geschlossen, dass