Vorlesung (2), 6.5.2022

[Wh.: $N \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}$ ebene N-Körper-problem auf

(N) $\quad Q = \{ z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N : z_j \neq z_k \text{ für } j \neq k \}$

mit $V : Q \longrightarrow (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{C}$,

$$V(z) = - \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} :$$

$$m_j \ddot{z}_j = -2 D_{\bar{z}_j} V(z) \qquad (*)$$

- Da (N) keine Gl.-lagen hat, sucht man periodische Lösungen, wo alle Körper eine gleichförmig kreislinige Bewegung um den Schwerpunkt $S = 0$ vollziehen,

$$z_j(t) = z_j e^{i\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

und $\omega > 0$ fest (Winkelgeschwindigkeit).

· $z = (z_1, \dots, z_N) \in G$ wäre dann eine Gl.-lage von (**) aus (N) durch den (zeitabhängigen) Koordinatenwechsel

$$z = w e^{i\omega t}:$$

$$(**) \qquad m_j \ddot{w}_j = -2 D_{\bar{w}_j} V(w) \underbrace{- 2 m_j \omega \cdot i \dot{w}_j}_{= \text{„Corioliskraft"}} + \underbrace{m_j \omega^2 z_j}_{= \text{„Zentrifugalkraft"}}$$

Eine Gl.-lösung $(w, \dot{w}) \in \Omega := Q \times \mathbb{C}^N$ von (**) erfüllt natürlich $\dot{w} = 0$, weshalb dort keine Corioliskraft wirkt. In so einem $w \in Q$ müssen dann die Grav.-kraft $2 D_{\bar{w}_j} V(w)$ und die Zentrifugalkraft $m_j \omega^2 z_j$ im Gleichgewicht sein. $\lrcorner$

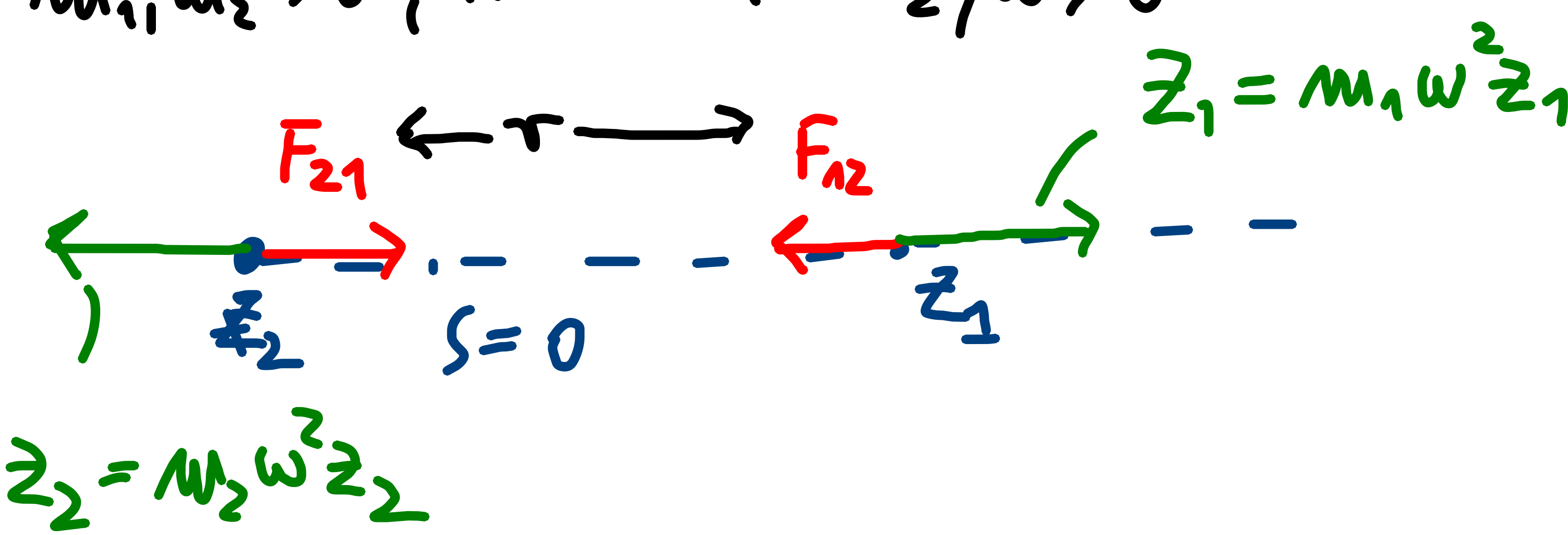
Definition. Man nennt $z \in Q \subseteq \mathbb{C}^N$ eine *Zentralkonfiguration* für das ebene N-Körperproblem mit $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}_+$ und Frequenz $\omega > 0$, wenn für alle $j = 1, \dots, N$ gilt:

$$m_j \omega^2 z_j = 2 \cdot D_{\bar{z}_j} V(z). \qquad \text{(ZK)}$$

Frage. Gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}_+$, $\omega > 0$ Zentralkonfigurationen des N-Körperproblems (mit Daten $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_+^N$, $\omega > 0$)?

Erinnerung. $N = 2$, $m_1, m_2 > 0$, $M = m_1 + m_2$, $\omega > 0$

$$F_{jk} = -m_j m_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^3}$$



Der Ansatz (mit $r = |z_2 - z_1|$)

$$z_1 = (1-\mu)\cdot r \,, \quad z_2 = \mu \cdot r \qquad (\mu \in (0,1))$$

Wegen $m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0$ sieht man:

$$\mu = \frac{m_1}{M} \,, \quad 1-\mu = \frac{m_2}{M}$$

Beachte: $$m_1 \omega^2 (1-\mu) r = Z_1 = -F_{12} = m_1 m_2 \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^3}$$

$$= m_1 m_2 \frac{r}{r^3} = m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$$

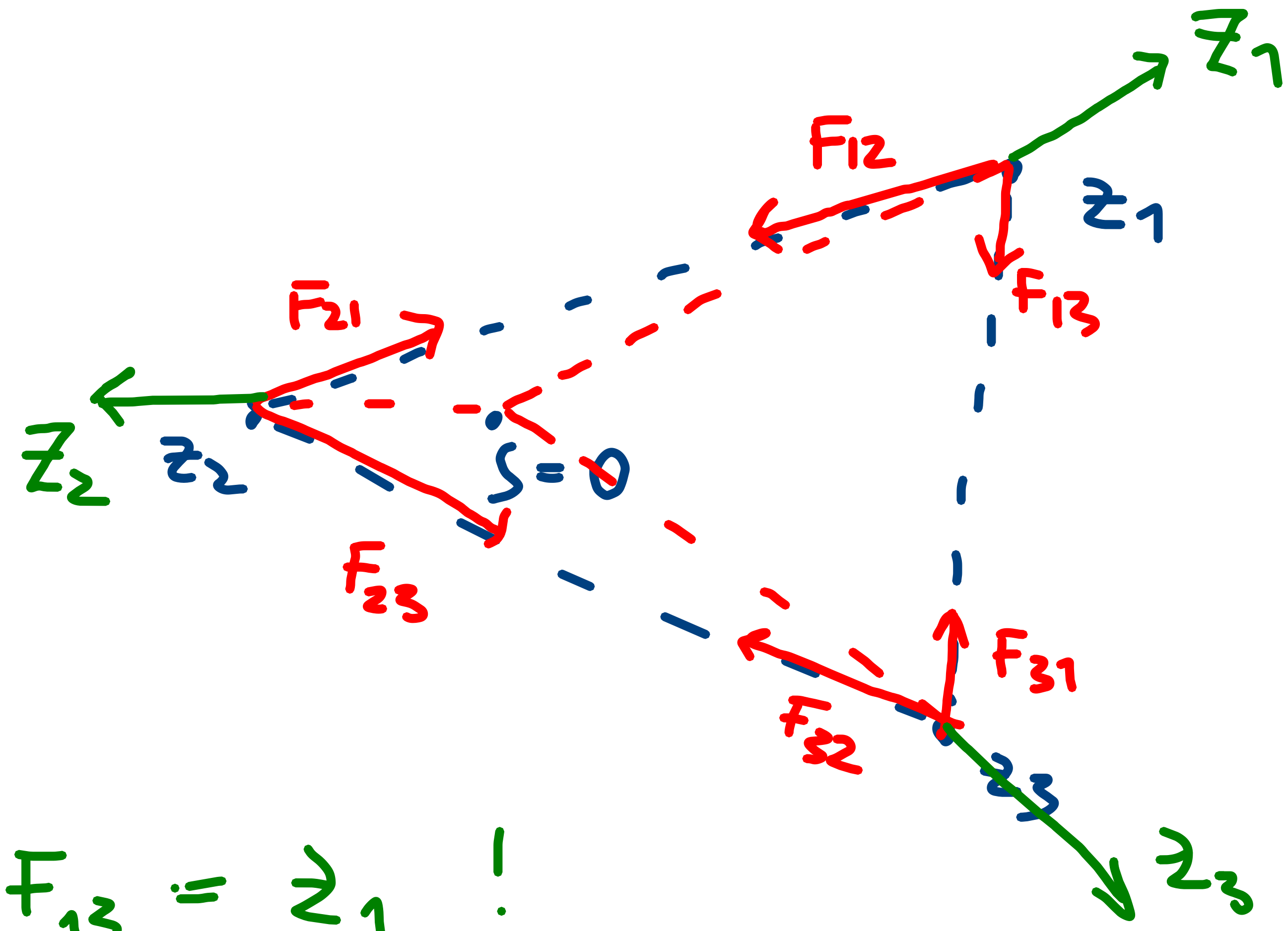
$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 m_2}{M}\,\omega^2 r = m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 r^3 = M$$

(Man muss also $r = \sqrt[3]{M/\omega^2}$ wählen.)

$z = (z_1, \dots, z_N)$ ZK ; Anf.-wert $(z, i\omega z) \in \Omega$

$N = 3$: $\quad m_1, .., m_3 > 0, \ \omega > 0$



$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$

$F_{12} + F_{13} := Z_1$!

$F_{23} + F_{21} = Z_2$

$F_{31} + F_{32} = Z_3$.

(1.4) Eigenschaften. (a) Nach Konstruktion ist also $z = (z_1, \dots, z_N) \in Q$ eine (m,ω)-ZK, genau wenn $z(t) = (z_j(t))_{j=1}^N$,

$$z_j(t) = z_j\, e^{i\omega t}$$

Lösung des (ebenen) N-Körperproblems ist.

(b) Wir wissen schon, dass der Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + \dots + m_N z_N) \in \mathbb{C}$$

dann im Nullpunkt liegen muss, denn es würde sonst auch eine Kreisbewegung durchführen, $S(t) = S e^{i\omega t}$, wo wir aber nach dem Schwerpunktsatz wissen, dass er sich gleichförmig geradlinig bewegt, $S(t) = S + t\dot{S}$. Wir können dies aber auch direkt aus der Definition einer ZK wie folgt herausholen:

$$M\omega^2 \cdot S = \sum_{j=1}^{N} m_j \omega^2 z_j \overset{ZK}{=} 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} D_{\bar{z}_j} V(z)$$

$$= + \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|^3} (z_j - z_k) = 0,$$

weil sich die Summanden paarweise für (j,k) und (k,j) gegenseitig annulieren.

(c) Aus der Konstruktion heraus ist auch klar, dass $z \in Q$ genau dann ZK ist, wenn $w = e^{ix} z$ (mit $x \in \mathbb{R}$) eine ist. (S^1 operiert durch Multiplikation in jeder Komponente auf $\mathbb{C}^N$ und $\{ZK'_n\}$ ist S^1-invariant.) Denn die Bahn von w ist ja unter dieser Trafo die gleiche wie von z und startet nur zu einem anderen Zeitpunkt.

$$w(t) = e^{i\omega t} w = e^{i\omega t} e^{i\alpha} \cdot z = e^{i(\omega t + \alpha)} z.$$

Allerdings gibt das auch die Definition direkt her:

$$m_j \omega^2 w_j = m_j \omega^2 e^{i\alpha} z_j \overset{ZK}{=} e^{i\alpha} \left(2 D_{\bar{z}_j} V(z) \right)$$

$$= e^{i\alpha} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} (z_j - z_k) = \cancel{e^{i\alpha}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|w_j - w_k|^3} \cancel{e^{-i\alpha}} (w_j - w_k)$$

$$= 2 \cdot D_{\bar{w}_j} V(w).$$

Man kann daher z.B. ohne Einschränkung annehmen, dass $z_1 \in \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{C}$ liegt (vgl. 2-ZK $(z_1, z_2) = \big((1-\mu)r, \mu r\big)$.

(1.5) Ein 1. Integral für (**).

Wir wissen bereits, dass

$$V(z) = -\sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|}$$

ein Potential für die Grav.-kraft

$$F_{Grav}(z) = -2\, D_{\overline{z_j}} V(z)$$

ist. Wir führen nun als Potential für die Zentrifugalkraft die so genannte $R : Q \to \mathbb{R}_+$,

$$R(z) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_j \underbrace{|z_j|^2}_{= z_j \cdot \overline{z_j}}$$

ein und setzen

Definition. Wir nennen $W, G : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$W(z) := V(z) - R(z),$$

$$G(z,\dot z) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j |\dot z_j|^2 + W(z)$$

die potentielle Energie bzw. die Gesamtenergie des Systems.

Beachte:

$$-2 D_{\overline{z_j}} R(z) = -\sum m_j \omega^2 z_j =: -F_{\mathrm{Zen}}(z)$$

(c) Wir stellen noch Rechenregeln für den Wirtinger-Kalkül bereit, die sich unmittelbar aus den bekannten Regeln für die üblichen partiellen Ableitungen ergeben:

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion, $G \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, so gilt:

(i) $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_j}\right)} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(ii) Ist $D \subseteq \mathbb{C}^m$ ein Gebiet und $\Phi : D \to G$ eine $\mathcal{C}^1$-Abb., so gilt die Kettenregel; $z = \Phi(w)$:

$$\frac{\partial}{\partial w_j}(f\circ\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_k}\circ\Phi\cdot\frac{\partial\Phi_k}{\partial w_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\circ\Phi\cdot\frac{\partial\overline{\Phi_k}}{\partial w_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}(f\circ\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_k}\circ\Phi\cdot\frac{\partial\Phi_k}{\partial \bar{w}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\circ\Phi\cdot\frac{\partial\overline{\Phi_k}}{\partial \bar{w}_j}$$

(iii) Ist schließlich $\alpha : I \to G$, $I \subseteq \mathbb{R}$ off./Intervall, eine C^1-Kurve, so gilt die Kettenregel in folgender Form:

$$\frac{d}{dt}(f\circ\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial z_j}\circ\alpha\cdot\dot{\alpha}_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\circ\alpha\cdot\dot{\bar{\alpha}}_j .$$

Damit beweisen wir jetzt:

<u>Satz</u>. Die Energie G ist ein 1. Integral für (**):

$$m_j \ddot{z}_j + 2 i \omega m_j \dot{z}_j - m_j \omega^2 z_j = -2 D_{\bar{z}_j} V(z)$$

Beweis. Für jede $(z, \dot{z}) \in \Omega$ bezeichnen wir, wie gewohnt mit $(z, \dot{z})$ auch die zugehörige Bahn von (**):

$$\frac{d}{dt} G(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \sum m_j \frac{d}{dt} \left(\dot{z}_j \cdot \bar{\dot{z}}_j \right) - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \frac{d}{dt} (z_j \cdot \bar{z}_j)$$

$$+ \frac{d}{dt} V(z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ m_j \left(\ddot{z}_j \overline{\dot{z}_j} + \dot{z}_j \cdot \overline{\ddot{z}_j} \right)$$

$$- \omega^2 \dot{z}_j \bar{z}_j - \omega^2 z_j \cdot \overline{\dot{z}_j} + 2 D_{z_j} V \cdot \dot{z}_j + 2 D_{\bar{z}_j}(z) \cdot \overline{\dot{z}_j} \Big\}$$

Mit

$$\mathrm{Re}\left(i \cdot \underline{m_j \omega} \, |\dot{z}_j|^2 \right) = 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

erhält man:

$$\frac{d}{dt} G(z, \dot{z}) = \mathrm{Re} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\overline{\dot{z}_j} \ddot{z}_j - \omega^2 \overline{\dot{z}_j} z_j + 2 i \omega \overline{\dot{z}_j} \dot{z}_j + 2 \overline{\dot{z}_j} D_{\bar{z}_j} V \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Re}\left[\bar{\dot{z}}_j \left(\underbrace{m_j \ddot{z}_j + 2 i m_j \omega \dot{z}_j - m_j \omega^2 z_j + 2 D_{\bar{z}_j} V}_{=0} \right) \right]$$

$$= 0.$$

$\blacksquare$