Vorlesung (4), 20.05.2022

Wh.: $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}_+^N$, $\omega > 0$

- $z \in Q = \{ (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N : z_j \neq z_k,$ für $j \neq k \}$

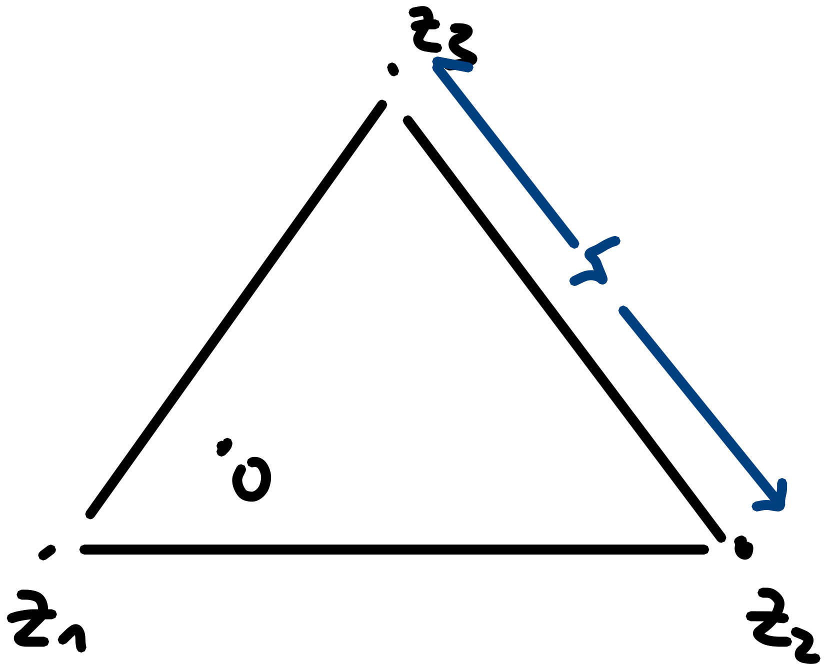
(m, ω)-ZK, falls

$$m_j \omega^2 z_j = +2 D_{\bar{z}_j} V(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} m_j m_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^3}$$

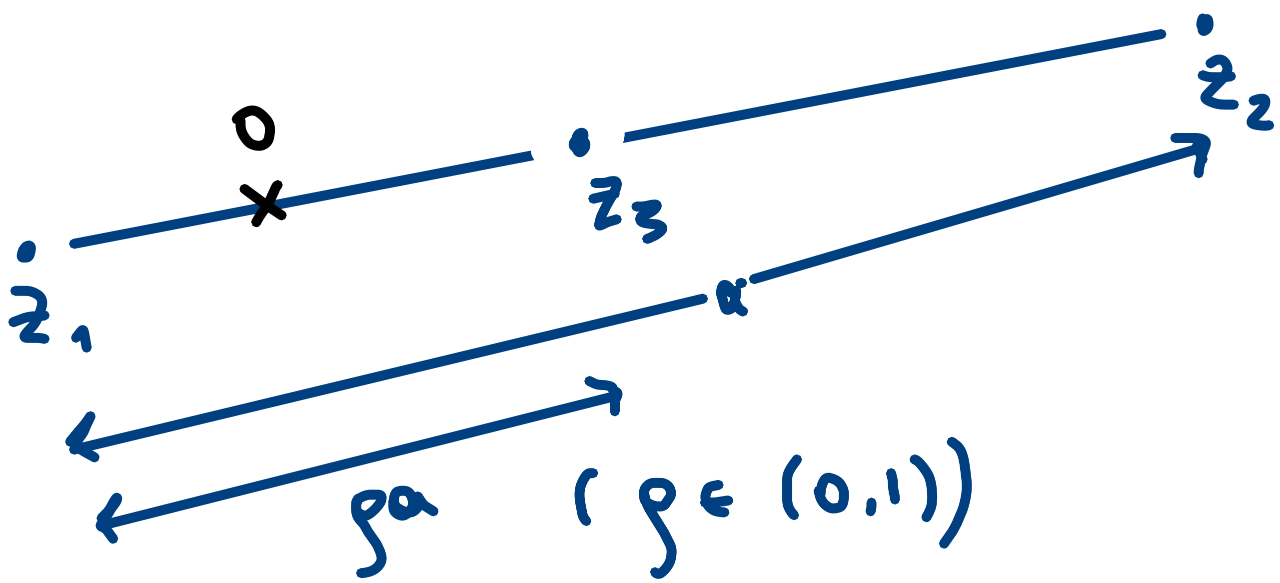
$(j = 1, \dots, N)$.

- Hatten gesehen: $\forall \omega > 0 \ \forall m \in \mathbb{R}_+^N$ existieren (m,ω)-zk'n
- Coulleys Satz ließ bei $N = 3$ nur noch eine gleichseitige Dreiecks-Lösung oder eine kollineare Lösung zu. $\lrcorner$

Frage: Sind diese Konfigurationen nur Lösungen und wenn ja, für welche Parameter?



$r > 0$



$a > 0, \ \rho \in (0,1)$

1. Fall: Gleichseitiges Dreieck Δ:

Wir setzen

$$r := |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| = |z_1 - z_3| > 0$$

Wir verschieben dann (z_1, z_2, z_3) so, dass sein Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3)$$

im Nullpunkt liegt, $S = 0$. Dann liegt Δ bis auf

Rotationen um 0 fest und wir wissen bereits, dass (z_1, z_2, z_3) ZK ist, wenn $(e^{ix} z_1, e^{ix} z_2, e^{ix} z_3)$ eines ist ($x \in [0, 2\pi]$).

Frage also: Gibt es zu $m_1, m_2, m_3 > 0$ und $\omega > 0$ ein $r > 0$, so dass das gleichs. Δ mit Kantenlänge $r > 0$ (mit m_j an der Position z_j) ZK ist?

Satz. Die gleichseitige Δ-Konfiguration mit Kantenlänge $r > 0$ (und Schwerpunkt in $S = 0$) ist eine

(m, ω) - ZK genau dann, wenn die Keplersche Bedingung

$$\omega^2 r^3 = M,$$

mit $M = m_1 + m_2 + m_3$, erfüllt ist.

Beweis. Für $j = 1, 2, 3$ ist bei einem gls. Δ

$$2 D_{\bar{z}_j} V(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} m_j m_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^3} = \frac{m_j}{r^3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} m_k (z_j - z_k)$$

$$= \frac{m_j}{r^3} \sum_{k=1}^{3} m_k (z_j - z_k)$$

Jetzt berücksichtigen wir noch, dass

$$\sum_{k=1}^{3} m_k z_k = M \cdot S = 0$$

ist, und erhalten für die gleichs. Dreieckskonfiguration mit Kantenlänge $r > 0$ und SP in 0:

$$2 D_{\bar{z}_j} V(z) = \frac{m_j}{r^3} \cdot M \cdot z_j \,.$$

$$\frac{M}{r^3} \overset{!}{=} \omega^2$$

Das ist eine (m,ω)-ZK genau dann, wenn

$$\frac{M}{r^3} = \omega^2 \iff \omega^2 r^3 = M.$$

ist.

$\blacksquare$

Kommentar. Beachte, dass wir dadurch zwei Lösungen erhalten: Sind z_1, z_2, z_3 im Uhrzeigersinn orientiert, also

$$z_j = \exp\left(i j \frac{2\pi}{3}\right) \quad (j = 1, 2, 3),$$

so kann man darauf (m_1, m_2, m_3) oder (m_1, m_3, m_2) setzen.

<u>2. Fall.</u> Bei den kollinearen Konfigurationen nehmen wir an, dass z_1 und z_3 die ~~beiden~~ äußeren Positionen sind und setzen

$$a := |z_3 - z_1| > 0.$$

Für $z_2 \in [z_1, z_3]$ gibt es dann ein eindeutiges

$\rho \in (0,1)$ mit

$$z_2 = (1-\rho) z_1 + \rho z_3 .$$

Dann verschieben wir die Konf. wieder so, dass ihr Schwerpunkt in den Nullpunkt fällt,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0 .$$

Nun liegt die Konfiguration wieder bis auf eine Drehung um $0 \in \mathbb{C}$ fest. Sie ist also durch die Parameter $(a,\rho) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1)$ bis auf Rotation eindeutig bestimmt.

[Es gibt zwei weitere, wo jeweils m_1 bzw. m_3 auf der Position z_2 liegt.]

?

?

Frage: Gibt es zu $(m,\omega) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$ ein $(a,\rho) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1)$, so dass die kollineare Konfiguration mit (a,ρ) (m,ω)-ZK ist?

Satz. Die rationale Funktion $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{m_2 + m_3 t^2}{m_2 t^3 + m_3 t^2} - \frac{m_2 + m_1 (1-t)^2}{m_2 (1-t)^3 + m_1 (1-t)^2}$$

hat genau eine Nullstelle $\rho_0 \in (0,1)$. Die kollineare Konf. (a, ρ) ist genau dann eine (m,ω)-ZK, wenn gilt

- $\rho = \rho_0$
- $\omega^2 a^3 = M \dfrac{m_2 + m_3 \rho_0^2}{m_2 \rho_0^3 + m_3 \rho_0^2}$.

Beweis. Siehe auch Siegel, Moser: Himmelsmechanik, § 14

(a) „$\Rightarrow$" (Notwendigkeit der Bedingung)
Wir können annehmen, dass $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3$ alle reell sind und

$$x_1 < 0, \quad x_2 = (1-\rho)x_1 + \rho x_3, \quad x_3 > 0$$

ist. Die Bedingung für eine ZK ~~ist~~ ist:

(1) $D_1 V(x) = m_1 \omega^2 x_1$

(2) $D_2 V(x) = m_2 \omega^2 x_2$

(3) $D_3 V(x) = m_3 \omega^2 x_3$

mit

$$V(x) = -\sum_{j<k} m_j m_k \frac{1}{|x_j - x_k|} = -\frac{m_1 m_2}{x_2 - x_1} - \frac{m_2 m_3}{x_3 - x_2} - \frac{m_1 m_3}{x_3 - x_1}$$

also:

(1) $$m_1 \omega^2 x_1 = -\frac{m_1 m_2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{m_1 m_3}{(x_3 - x_1)^2}$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{\rho^2 a^2} - \frac{m_1 m_3}{a^2}$$

$x_3 - x_1 = a$

$x_2 - x_1 = \rho a$

$x_3 - x_2 = (1-\rho) a$

$$\Rightarrow \quad (1) \qquad \omega^2 x_1 = -\frac{m_2}{\rho^2 a^2} - \frac{m_3}{a^2}$$

$$(3) \qquad m_3 \omega^2 x_3 = +\frac{m_1 m_3}{a^2} + \frac{m_2 m_3}{(1-\rho)^2 a^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega^2 x_3 = \frac{m_1}{a^2} + \frac{m_2}{(1-\rho)^2 a^2}$$

Ähnlich:

$$(2) \qquad \omega^2 x_2 = +\frac{m_1}{\rho^2 a^2} - \frac{m_3}{(1-\rho)^2 a^2} .$$

Beachte: (2) folgt aus (1) und (3) und

(4) $$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

Setze nun

$$x_2 = (1-\varrho) x_1 + \varrho x_3$$
$$x_3 = x_1 + a$$

in (4) ein und erhalte:

$$0 = m_1 x_1 + m_2 x_1 - \varrho m_2 x_1 + \varrho a m_2 + m_2 \varrho \cdot x_1$$
$$+ m_3 a + m_3 x_1$$

$$= M \cdot x_1 + m_2 \rho a + m_3 a$$

$\Rightarrow$

(5) $$x_1 = \frac{1}{M}\left(-m_2 \rho a - m_3 a\right)$$

Ebenso:

$$0 = m_1 (x_3 - a) + m_2 \Big((1-\rho)(x_3 - a) + \rho x_3 \Big) + m_3 x_3$$

$$= \dots = M \cdot x_3 - m_2 (1-\rho) a - m_1 a$$

$\Rightarrow$

(6) $$x_3 = \frac{1}{M}\left(m_2 (1-\rho) a + m_1 a \right).$$

Geht man jetzt mit (5) in (1) rein, so folgt:

$$-\frac{m_2}{\rho^2 a^2} - \frac{m_3}{a^2} = \frac{\omega^2}{M}\left(-m_2 \rho a - m_3 a\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2}{\rho^2} + m_3 = \frac{\omega^2 a^3}{M}\left(m_2 \rho + m_3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega^2 a^3}{M} = \frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} \qquad (*).$$

Ebenso (6) in (3) ergibt:

$$\frac{\omega^2 a^3}{M} = \frac{m_2(1-\rho)^{-2} + m_1}{m_2(1-\rho) + m_1}.$$

Setzt man nun $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{m_2 t^{-2} + m_3}{m_2 t + m_3} - \frac{m_2(1-t)^{-2} + m_1}{m_2(1-t) + m_1},$$

so ist also ρ eine Nullstelle von f und a z. B. vermöge (*) gegeben durch

$$\frac{\omega^2 a^3}{M} = \frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} = \frac{m_2 + m_3 \rho^2}{m_2 \rho^3 + m_3 \rho^2}.$$

(b) „$\Leftarrow$“: Beachte, dass für

$$g(t) = \frac{m_2 t^{-2} + m_3}{m_2 t + m_3}$$

gilt:

$$\dot{g}(t) = \frac{1}{(\ldots)^2}\left(-2 m_2 t^{-3} \cdot (m_2 t + m_3) - (m_2 t^{-2} + m_3) \cdot m_2\right)$$

$$= \frac{1}{(\ldots)^2}\left(-2 m_2^2 t^{-2} - 2 m_2 m_3 t^{-3} - m_2^2 t^{-2} - m_2 m_3\right)$$

$$< 0$$

$\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle in $(0,1)$ (und

ist eine Nullstelle eines Polynoms 5. Grades)
Wir wählen diese Nullstelle $\varrho \in (0,1)$ und setzen
$a > 0$ durch

$$\frac{\omega^2}{M} a^3 = \frac{m_2 \varrho^{-2} + m_3}{m_2 \varrho + m_3}$$

fest. Setze nun (x_1, x_2, x_3) wie (1)-(3) fest. Rechne dann nach, dass

- $x_3 - x_1 = a$
- $x_2 - x_1 = \varrho a$

$\Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3)$ ist koll. ZK. $\blacksquare$

und

$$\frac{d}{dt} g(1-t) = \dot{g}(1-t)\cdot(-1)$$

$\Rightarrow$ $$\dot{f}(t) < 0 \,, \quad \forall t \in (0,1).$$

Beachte zudem:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to 1} f(t) = -\infty$$