Vorlesung (6), 3.6.2022

⌈ §2. Stabilität von Gl.-lagen

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f(p) = 0$ $(p \in \Omega)$.

p heißt +-stabil $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in B_\delta(p)$:

- $t_+(x) = +\infty$
-

$$\| \varphi^t(x) - p \| < \varepsilon \,, \quad \forall t > 0 .$$

(b) p Attraktor $:\Leftrightarrow$ p $+$-stabil

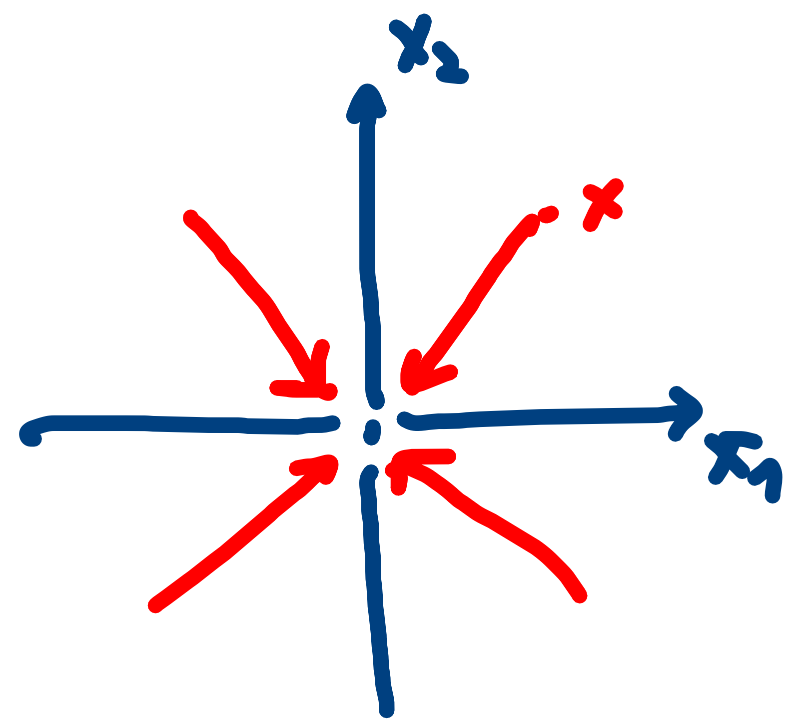
$\cdot\ \exists \delta>0\ \forall x\in B_\delta(p):\ \varphi^t(x)\longrightarrow p.$ $\lrcorner$

Kommentar. (a) In analoger Weise definiert man „$-$-stabil" und „$-$-asymptotisch stabil, in dem man „in die Vergangenheit schaut"
(b) $p\in\Omega$ heißt stabil (schlechthin), wenn p sowohl $+$-stabil als auch $-$-stabil ist.
(c) Alle Varianten von Stabilität bleiben unter lokaler Äquivalenz von Gl.-lagen erhalten.

Beispiele (a) Der Fluss zu $\dot{x} = -x$ (auf $\mathbb{R}^2$) ist ein Attraktor,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(x) = \lim_{t\to\infty} (e^{-t}x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

(für die Stabilität kann man $\delta = \varepsilon$ wählen: $B_\varepsilon(0)$ ist *fluss-invariant*)



$\dot{x} = -x$

(b) Der Fluss zum harmonischen Oszillator (bei $\omega = 1$)

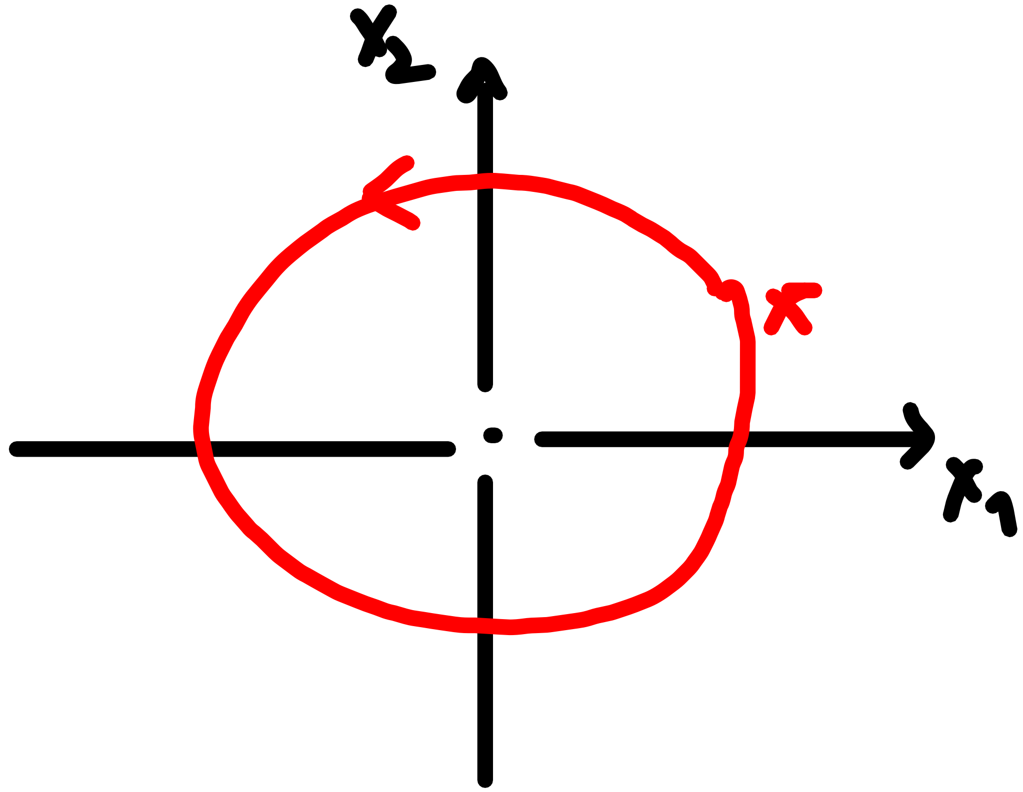
$$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$

ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil. In komplexen Koordinaten lautet er

$$\dot{z} = iz,$$

also

$$\varphi^t(z) = e^{it} z$$



(Man kann wieder $\delta = \varepsilon$ wählen.)

(c) Die Gleichgewichtslagen $x = 0$ der linearen Systeme

$$\dot{x} = Ax,$$

bei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind also allesamt nicht paarweise äquivalent.

(d) Der Fluss zu $\dot{x} = A x$ bei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

also

$$\dot{x}_1 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2,$$

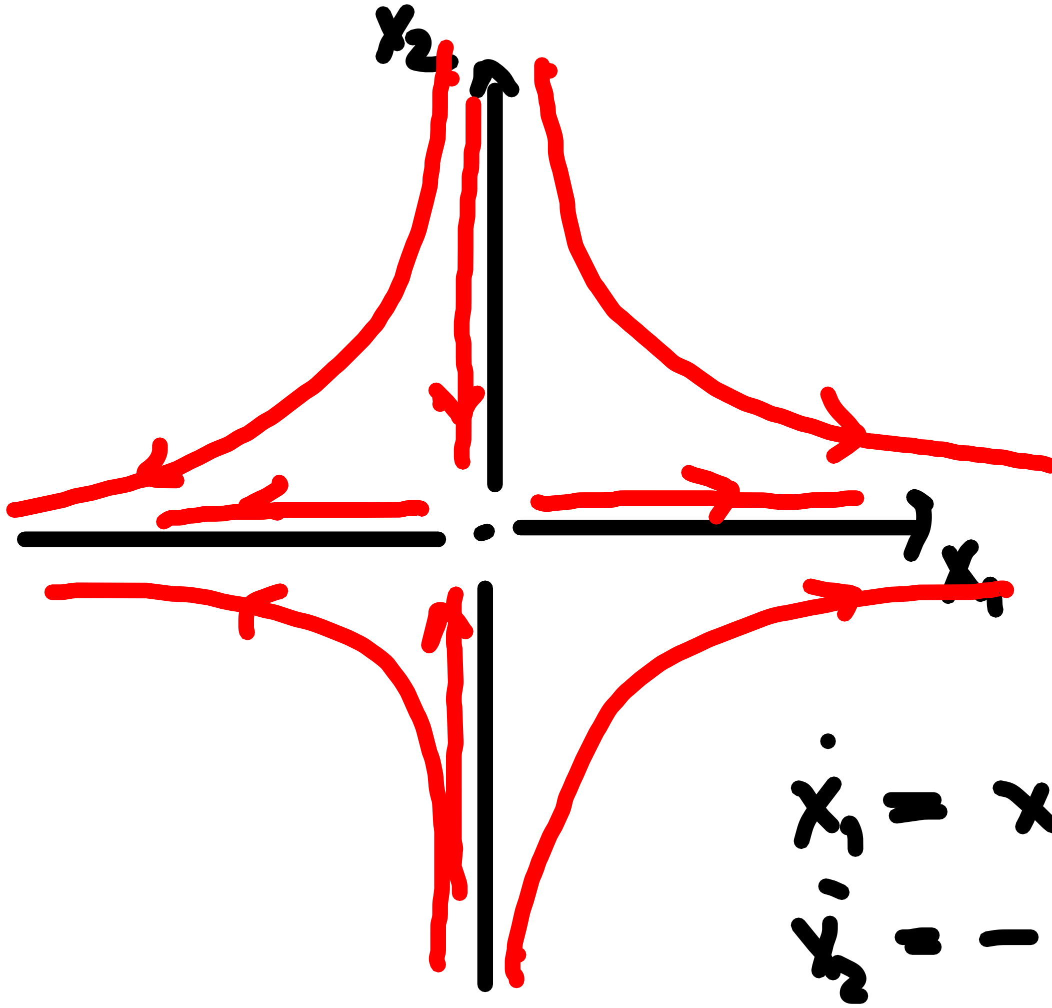
also

$$\varphi^t(x_1, x_2) = (e^t x_1, e^{-t} x_2)$$

ist auch wieder anders. Bei ihm liegen die Flusskurven auf den Hyperbeln

$$\{x_1 x_2 = c\}$$

$(H(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ist ein 1. Integral$)$:



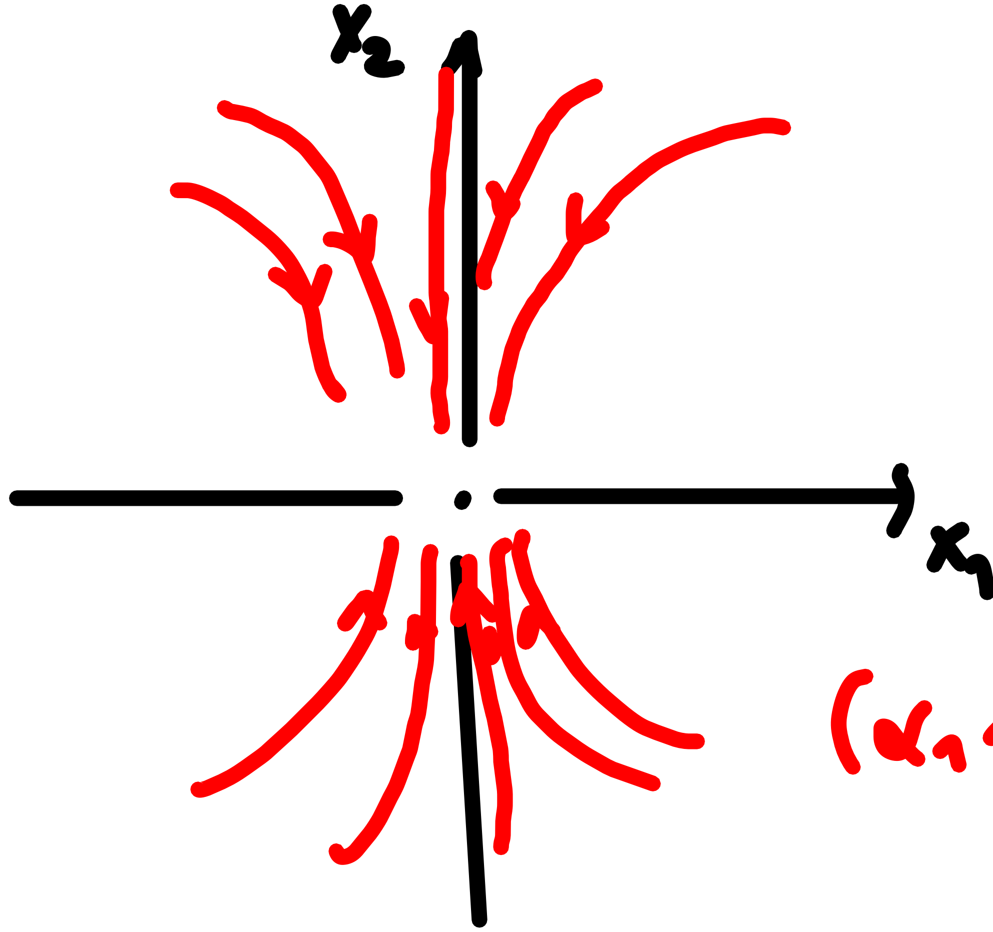
$$\dot{x}_1 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$

„hyperbolischer Punkt".

(e) Selbst für $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$ ist zwar

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = \alpha_2 x_2$$

zwar auch ein Attraktor, aber nicht äquivalent zu $\dot{x} = -x$ (wie wir gleich sehen werden),



$(\alpha_1 < \alpha_2 < 0)$

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ bei $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

spielen also eine besondere Rolle.

Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld und $p \in \Omega$ eine Gl.-lage: $f(p) = 0$. Dann heißen die Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (mit Vielfachheiten) von $A := Df(p) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die charakteristischen Exponenten von p.

Kommentar. Die Bedeutung der char. Exponenten liegt darin, dass sie unter lokaler Äquivalenz (samt ihren Vielfachheiten) *invariant* bleiben, sogar die ganze Konjugationsklasse von $A = Df(p) \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$,

$$[A] = \{ SAS^{-1} \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R} : S \in \mathrm{Gl}_n \mathbb{R} \}$$

bleibt invariant.

Satz. Sei (Ω, φ) ein dynamischer System und $p \in \Omega$ eine Gl.-lage von φ. Sei (D, ψ) äquivalent zu (Ω, φ) ($\Omega, D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete) vermöge eines Diffeos $u : D \to \Omega$ und $p = u(q)$. Dann ist auch q eine Gl.-lage von ψ

sind die charakteristischen Exponenten von p und q (sogar die Konj.-Klassen von $A = Df(p)$ und $B = Dg(q)$, wo $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ bzw. $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ die zugeh. VF'n sind) stimmen überein.

<u>Beweis</u>. Wir wissen schon, dass sich die Vektorfelder $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ vermöge $u : D \to \Omega$ so transformieren:

$$g(y) = Du(y)^{-1} f(u(y)). \qquad (*)$$

Wir wissen auch, dass die Gl.-lagen von φ (bzw. ψ)

genau die Nullstellen von f (bzw. g) sind.
Ist nun $f(p) = 0$, so ist auch

$$g(q) = Du(q)^{-1} \cdot 0 = 0,$$

also q auch GL-lage von ψ.
Wir setzen jetzt

$$A = Df(p) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\ell}(p) \right)_{1 \le \ell, j \le n},$$

$$B = Dg(q) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(q) \right)_{1 \le k, i \le n},$$

sowie

$$Du(y)^{-1} =: (s_{ij}(y))_{1 \leq i,j \leq n}$$

Dann besagt (*) in Komponenten:

$$g_i(y) = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(y) \cdot f_j(u(y)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Partielle Differentiation in e_k-Richtung und Auswertung bei $y = q$ liefert dann:

$\forall\, 1 \le i,k \le n$:

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(q) = \sum_j \left(\frac{\partial s_{ij}}{\partial y_k}(q) \cdot \underbrace{f_j(p)}_{=0} + s_{ij}(q) \sum_l \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(p) \cdot \frac{\partial u_l}{\partial y_k}(q) \right)$$

⌈ zur Sicherheit: $u : D \to \Omega$ 2-mal stetig diffbar ⌋

Da aber

$$\left(\frac{\partial u_l}{\partial y_k}(q) \right) = Du(q) = S^{-1}$$

ist, bedeutet das in Matrixschreibweise

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1}.$$

$\blacksquare$

2.3. Charakteristische Exponenten und Stabilität bei linearen Systemen

Sei also $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ mit Eigenwerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Wir betrachten das lineare System

$$\dot{x} = Ax \quad \text{auf } \mathbb{R}^n$$

und wollen die Stabilität der Gl.-lage
$p=0$ untersuchen.

<u>Lemma</u>. $p=0$ ist genau dann $+$-stabil, wenn alle $+$-Bahnen beschränkt bleiben, d.i.: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists c>0$ $\forall t>0$:

$$\|\varphi^t(x)\| \leq c.$$

<u>Beweis</u>. „$\Rightarrow$": Zu $\varepsilon = 1$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass gilt: Ist $\|x\| < \delta$, so ist $\|\varphi^t(x)\| < 1$, $\forall t > 0$
In $B_\delta(0)$ kann man eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ wählen (z.B. $v_j = \frac{\delta}{2} \cdot e_j$ $(j = 1, \dots, n)$). Ist nun $x \in \mathbb{R}^n$

beliebig und

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j ,$$

so folgt wegen der Linearität des dynamischen Systems bzgl. x:

$$\varphi^t(x) = \exp(tA) \cdot x = \varphi^t\left(\sum_j \lambda_j v_j\right)$$

$$= \sum_j \lambda_j \varphi^t(v_j)$$

$\Rightarrow$

$$\|\varphi^t(x)\| \leq \sum |\lambda_j| \underbrace{\|\varphi^t(v_j)\|}_{\leq 1} \leq C \quad , \ \forall t > 0$$

wenn wir

$$c = \sum |\lambda_j|$$

wählen.

„$\Leftarrow$“: Ist $c_j > 0$ so, dass für die kanonische Basis (e_j) gilt

$$\|\varphi^t(e_j)\| \leq c_j \,, \quad \forall t > 0,$$

so gilt bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für alle $x \in B_\delta(0)$:

$$\| \varphi^t(x) \| = \| \sum_j x_j \varphi^t(e_j) \|$$

$$\leq \sum_j \underbrace{|x_j|}_{<\delta} \cdot \underbrace{\| \varphi^t(e_j) \|}_{\leq c_j} \leq n \cdot \delta \cdot c < \varepsilon ,$$

wenn wir

$$\delta := \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{n \cdot \underbrace{\max_{j=1}^{n} (c_j)}_{=: c}}$$

wählen.

$\square$

Kommentar. (a) Es reicht also die Beschränktheit der +-Bahnen bzgl. einer Basis zu prüfen.

(b) Deshalb kann man auch zum komplexifizierten System

$$\dot{z} = Az \quad \text{auf } \mathbb{C}^n$$

übergehen, weil sich die Stabilität von $z_0 = 0$ ebenfalls durch die Beschränktheit der +-Bahnen bzgl. einer $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}^n$ ausdrücken lässt.

(c) Das verschafft uns mehr Koordinatentransformationen $S \in GL_n\mathbb{C}$ (und wir könnten auch von vorne herein $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{C}$ annehmen.)

Beobachtung. Für Stabilitätsfragen spielen nur die Vorzeichen der Realteile der charakteristischen Exponenten eine wichtige Rolle. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A und $z \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A bzgl. α, $Az = \alpha z$, so ist die Lösung von

$$\dot{z} = Az \quad , \quad z(0) = z$$

gerade:

$$z(t) = e^{\alpha t} \cdot z \, ,$$

denn

$$\dot{z}(t) = \alpha e^{\alpha t} z = \alpha \cdot z(t) = A z(t),$$
$$z(0) = z.$$

Deshalb heißt α auch „Exponent".
Zerlegen wir α nun in Real- und Imaginärteil,

$$\alpha = \lambda + i\mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

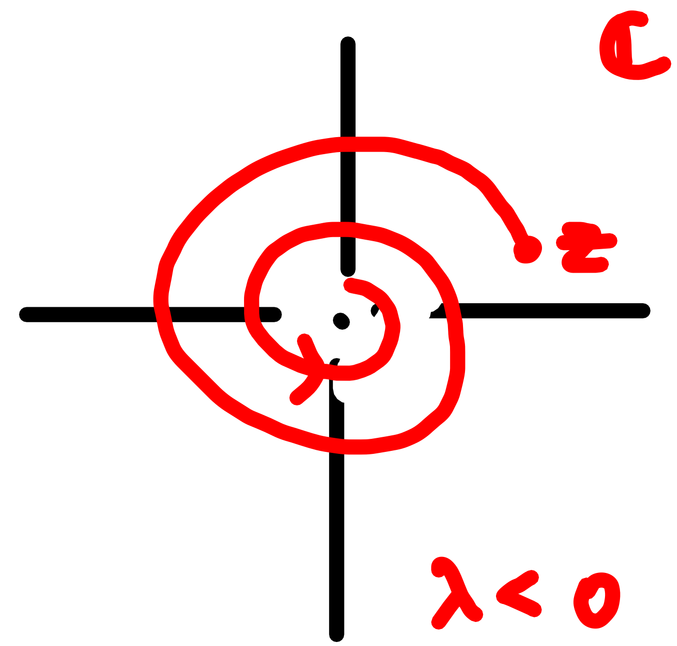
so beobachten wir, dass

$$\| z(t) \| = \| e^{\alpha t} z \| = | e^{\alpha t} | \cdot \| z \| =$$

$$= |e^{\lambda t} e^{i\mu t}| \cdot \|z\|$$

$$= |e^{\lambda t}| \cdot \underbrace{|e^{i\mu t}|}_{=1} \cdot \|z\| = e^{\lambda t} \cdot \|z\|$$

und dieses wird unbeschränkt genau im Fall $\lambda > 0$. Wir halten fest:



Satz. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ mit Eigenwerten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Ist $p = 0$ eine „stabile Gl.-lage von $\dot{x} = Ax$, so gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$\mathrm{Re}(\alpha_j) \leq 0.$

$\square$