Vorlesung (8), 24.06.2022

[Wh.: $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$; betrachte das lineare System zu

$$\dot{x} = Ax$$

die Gl.-lage $p = 0$. Wir hatten

- $p = 0$ ist Attraktor $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) < 0$, $\forall \alpha \in \mathrm{sp}(A)$
- $p = 0$ t-stabil $\Longrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$, $\forall \alpha \in \mathrm{sp}(A)$
- „$\Leftarrow$" gilt i.a. nicht:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow \exp(tA) = \mathbb{1} + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = e_2 \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x(t)\| = \sqrt{1+t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty. \;\square$$

Kommentar. (a) Erinnere, dass man $\mathbb{C}^n$ in die so genannten Haupträume von A zerlegen kann,

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{sp}(A)} \mathrm{Hau}(A, \alpha),$$

$$\mathrm{Hau}(A,\alpha) = \ker(A-\alpha\mathbb{1})^n$$

Man sieht dann relativ schnell, dass die Haupträume invariant unter dem Fluss sind. Man kann also zerlegen:

$$\mathbb{C}^n = \overbrace{\bigoplus_{\alpha:\,\mathrm{Re}(\alpha)<0} \mathrm{Haup}(A,\alpha)}^{V_1} \oplus \overbrace{\bigoplus_{\alpha:\,\mathrm{Re}(\alpha)=0} \mathrm{Hau}(A,\alpha)}^{V_2}$$

Wendet man die vorherigen Resultate auf die Unterräume V_1 und V_2 an, so erhält man:

$p=0$ ist +-stabil $\Longleftrightarrow$

- $\mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$, $\forall \alpha \in sp(A)$

- $\underbrace{\text{alg. VF}}_{\substack{\text{Nullstellenordnung} \\ \text{von } \alpha \text{ in } \chi_A}}$ von α = $\underbrace{\text{geom. VF}}_{= \dim \mathrm{Eig}(A, \alpha)}$ von α, $\forall \alpha \in sp(A)$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$.

Damit ist die (asympt.) Stabilität von $p=0$ bei linearen Systemen vollständig geklärt und kann alleine durch die

$$[A] = \{ B = SAS^{-1} \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R} : S \in GL_n \mathbb{R} \}$$

charakterisiert werden.

Frage: Kann man auch für nicht-lineare Systeme

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(\Omega ; \mathbb{R}^n)$$

die Stabilität von Gl.-lagen $p \in \Omega$ durch ihre char. Exponenten beschreiben?

2.4. Stabilität im nicht-linearen Fall

Situation. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar
$p \in \Omega$ Gl.-lage zu

$$\dot{x} = f(x),$$

also $f(p) = 0$. Sei $A = Df(p) \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ mit Eigenwerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (mit Vielfachheiten).

Beobachtung. Ist ein Eigenwert $\alpha \in sp(A)$ auf der imaginären Achse, $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$, so wird man keine

Stab.-aussagen i.a. erwarten können, da sich das Verhalten der Bahnkurven, die in der Nähe von p starten, von Termen höherer Ordnung abhängen.

<u>Beispiel</u>$^{(a)}$: $n = 1$, $p = 0$, $f(x) = \pm x^3$

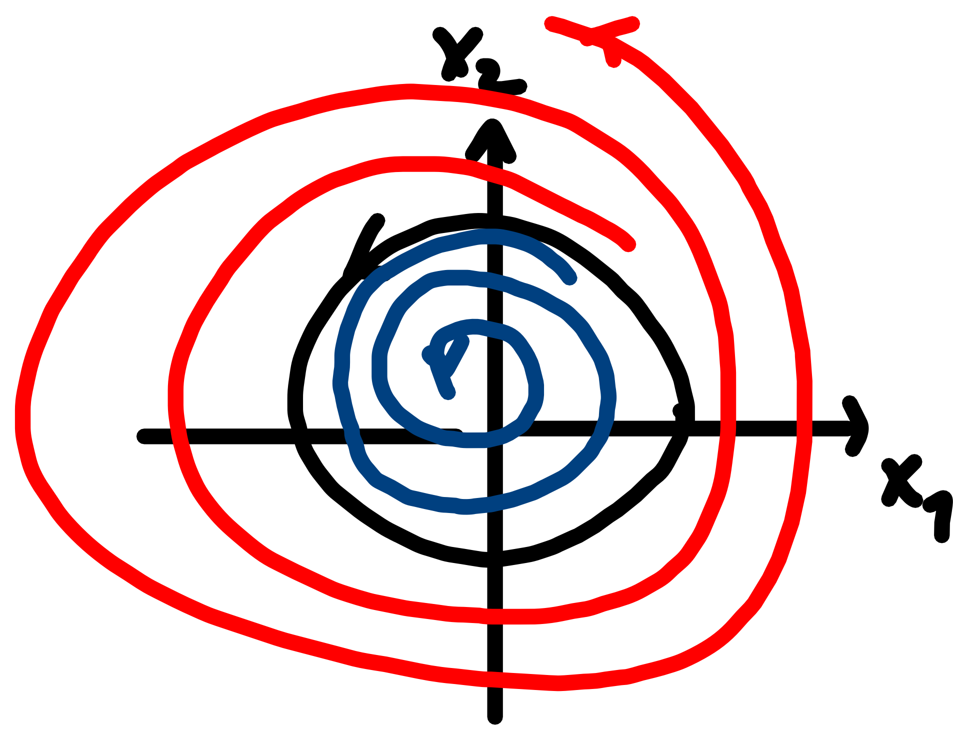
Hier entscheidet offenbar das Vorzeichen von x^3 darüber, ob $p=0$ ein „Abstoßer" (bei $+$) oder ein „Attraktor" ist.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}$

(b) Dieses Beispiel kann man leicht in $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^n$) wie folgt verallgemeinern:

- linearer Teil: harm. Oszillator:

$$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_2 = +x_1$$



Setze nun $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1,x_2) = (-x_2 \quad , x_1) \pm \|x\|^2 \cdot x$$
$$= (-x_2 \pm \|x\|^2 x_1, \; x_1 \pm \|x\|^2 \cdot x_2) \, .$$

Hier wäre also

$$sp(A) = \{\pm i\}$$

und man kann keine Aussage über Stabilität erwarten.

(c) An $f(x) = x^2$ sieht man außerdem, dass $p=0$ auch gar keine Art von Stabilität hat. Also: Bei $\alpha \in i\mathbb{R}$ kann so ziemlich alles passieren!

(d) Im Fall, dass

$$\mathrm{sp}(A) \subseteq H_- := \{ \alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\alpha) \lneq 0 \}$$

ist, kann man allerdings Hoffnung haben, dass die asympt. Stabilität der Linearisierung den Effekt der höheren Ordnungsterme dominiert:

Frage: Falls $\mathrm{sp}(A) \subseteq H_-$, ist dann $p \in \Omega$ Attraktor?

Sehr schöne Technik, die auf Liapunov zurückgeht, wird das Problem lösen: Man arbeitet nämlich nicht mit der eukl. Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, sondern mit einer Norm $\|\cdot\|_A$, die der Matrix $A = Df(p)$ angepasst ist.

<u>Erinnere</u>. Je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h.: Es gibt $c, C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1 .$$

Idee (von Liapunov): Benutze eine Norm $\|\cdot\|_A$ auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der die Bahnen der Linearisierung

$$\dot{x} = Ax$$

sogar streng monoton fallend in dieser Norm gegen 0 konvergieren.

Definition. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ für alle Eigenwerte α von A. Sei (φ^t) der Fluss zu dem linearen System $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, $\varphi^t(x) = \exp(tA)\cdot x$.

Die Liapunov-Norm bzgl. A auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty),$$

$$\|x\|_A^2 := \int_0^\infty \|\varphi^t(x)\|^2 \, dt.$$

Kommentare. (a) Erinnere, dass für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Re}(\alpha) < \beta < 0 \quad , \quad \forall \alpha \in sp(A)$$

gilt:

$$\|e^{tA}\| \le e^{t\beta}, \quad \forall t > 0$$

(und daher $x(t)$ für $t \to \infty$ sogar exponentiell gegen 0 konvergiert). Deshalb ist wegen

$$\int_0^\infty \|\varphi^t(x)\|^2 \, dt \le \int_0^\infty \|\exp(tA)\|^2 \cdot \|x\|^2 \, dt$$

$$\le \int_0^\infty e^{2t\beta} \, dt \cdot \|x\|$$

$$= \frac{1}{2\beta} e^{2t\beta} \Big|_0^\infty \cdot \|x\| = \frac{1}{-2\beta} \cdot \|x\| < \infty$$

$\|x\|_A$ tatsächlich endlich und die Normeigenschaften folgen direkt aus der von $\|\cdot\|$ oder dem folgenden Argument.

(b) Die Liapunov-Norm kommt auch von einem Skalarprodukt

$$\langle -,- \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

d.h.

$$\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle_A,$$

mit

$$\langle x, y \rangle_A = \int_0^\infty \langle \varphi^t(x), \varphi^t(y) \rangle \, dt.$$

Offenbar ist $\langle -,- \rangle_A$ auch bilinear, symmetrisch und positiv definit (weil $\langle -,- \rangle$ es ist).

Tatsächlich ist auch dieses uneigentliche Integral endlich, denn

$$
\begin{aligned}
|\langle \varphi^t(x), \varphi^t(y) \rangle| &\leq \|\varphi^t(x)\| \cdot \|\varphi^t(y)\| \\
&\leq \|e^{tA}\| \cdot \|x\| \cdot \|e^{tA}\| \cdot \|y\| \\
&\leq e^{2\beta t} \cdot \|x\| \cdot \|y\| .
\end{aligned}
$$

(c)

Deshalb muss es ein positiv definites

$P \in \mathrm{Sym}_n \mathbb{R}$ geben, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle x, y \rangle_A = \langle Px, y \rangle .$$

Das ist tatsächlich mit

$$P := \int_0^\infty \exp(tA^*) \cdot \exp(tA) \, dt$$

so, denn wegen $\exp(tA^*) = \exp(tA)^*$ ist:

$$\langle x, y\rangle_A = \int_0^\infty \langle e^{tA}\cdot x, e^{tA}\cdot y\rangle \, dt$$

$$= \int_0^\infty \langle (e^{tA})^* e^{tA} x, y\rangle \, dt$$

$$= \int_0^\infty \langle e^{tA^*}\cdot e^{tA}\cdot x, y\rangle \, dt$$

$$= \langle \left(\int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} \, dt\right)\cdot x, y\rangle = \langle Px, y\rangle .$$

Lemma. Für alle $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, für alle $\alpha \in \mathrm{sp}(A)$, gilt:

(a)

$$A^* P + PA = -\mathbb{1}$$

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist:

$$\frac{d}{dt} \| x(t) \|_A^2 = - \| x(t) \|^2$$

Kommentar. An Teil (b), oder direkt aus der Definition von $\| \cdot \|_A$ sieht man übrigens, dass die Bahnkurven von $\dot{x} = Ax$ in der Liapunov-Norm streng monoton fallend gegen 0 konvergieren: $t_1 < t_2$

$$\|x(t_2)\|_A^2 - \|x(t_1)\|_A^2 = -\int_{t_1}^{t_2} \|\varphi^t(x)\|^2 \, dt < 0.$$

$$\int_0^\infty \underbrace{\|\varphi^t(x(t_2))\|^2}_{=\|\varphi^{t+t_2}(x)\|^2} = \int_{t_2}^\infty \|\varphi^s(x)\|^2 \, ds$$

Beweis. (a)

$$A^*P + PA = \int_0^\infty \Big(\underbrace{A^* e^{tA^*}}_{=\frac{d}{dt}(e^{tA^*})} \cdot e^{tA} + e^{tA^*} \underbrace{e^{tA} \cdot A}_{=\frac{d}{dt}(e^{tA})}\Big) \, dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} e^{tA^*} \right) \cdot e^{tA} + e^{tA^*} \cdot \frac{d}{dt} \left(e^{tA} \right) \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{tA^*} \cdot e^{tA} \right) dt$$

$$\overset{HS}{=} e^{tA^*} \cdot e^{tA} \Big|_0^\infty = 0 - \mathbb{1} = -\mathbb{1}.$$

(b)

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_A^2 = \frac{d}{dt} \langle Px, x \rangle = \langle P\dot{x}, x \rangle + \langle Px, \dot{x} \rangle$$

$$= \langle PAx, x \rangle + \langle Px, Ax \rangle$$

$$= \langle PAx, x \rangle + \langle A^* Px, x \rangle$$

$$= \langle \underbrace{(A^*P + PA)}_{= -1} x, x \rangle = -\|x\|^2.$$

$\square$

<u>Theorem</u>. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $p \in \Omega$ eine Gl.-lage des dynamischen Systems zu $\dot{x} = f(x)$, $f(p) = 0$. Dann gilt.

Ist $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ für alle charakteristischen Exponenten von p, so ist p ein Attraktor.

<u>Beweis</u>. Sei o.E. $p = 0$. Sei $A := Df(0) \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_A$ die zu A gehörende Liapunov-Norm auf $\mathbb{R}^n$. Sei weiter $c > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$c \|x\|_A^2 \leq |x|^2$$

und schließlich $\delta > 0$ so klein, dass für $\hat{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$\hat{f}(x) = f(x) - Ax$$

gilt:

$$\|\hat{f}(x)\|_A \leq \frac{c}{4}\|x\|_A$$

Dann ist für alle $x \in B_\delta(0)$:

$\left\lceil \dot{x} = f(x) = Ax + \hat{f}(x) \right\rfloor$

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|_A^2 = \langle \dot{x}, x\rangle_A + \langle x, \dot{x}\rangle_A$$

$$= \langle (PA + A^*P)x, x\rangle + \langle \hat{f}(x), x\rangle_A + \langle x, \hat{f}(x)\rangle_A$$

$$\overset{La.}{=} -\|x\|^2 + 2\|\hat{f}(x)\|_A \cdot \|x\|_A$$

$$\leq -\|x\|^2 + \frac{c}{2}\|x\|_A^2 \leq \frac{c}{2}\|x\|_A^2 .$$

Mit Gronwalls Lemma folgt:

$$\|x(t)\|_A^2 \leq e^{-\frac{c}{4}t} \|x\|_A \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

(sogar exponentiell). Also ist $p=0$ Attraktor.

$\blacksquare$