Vorlesung (10), 15.07.2022

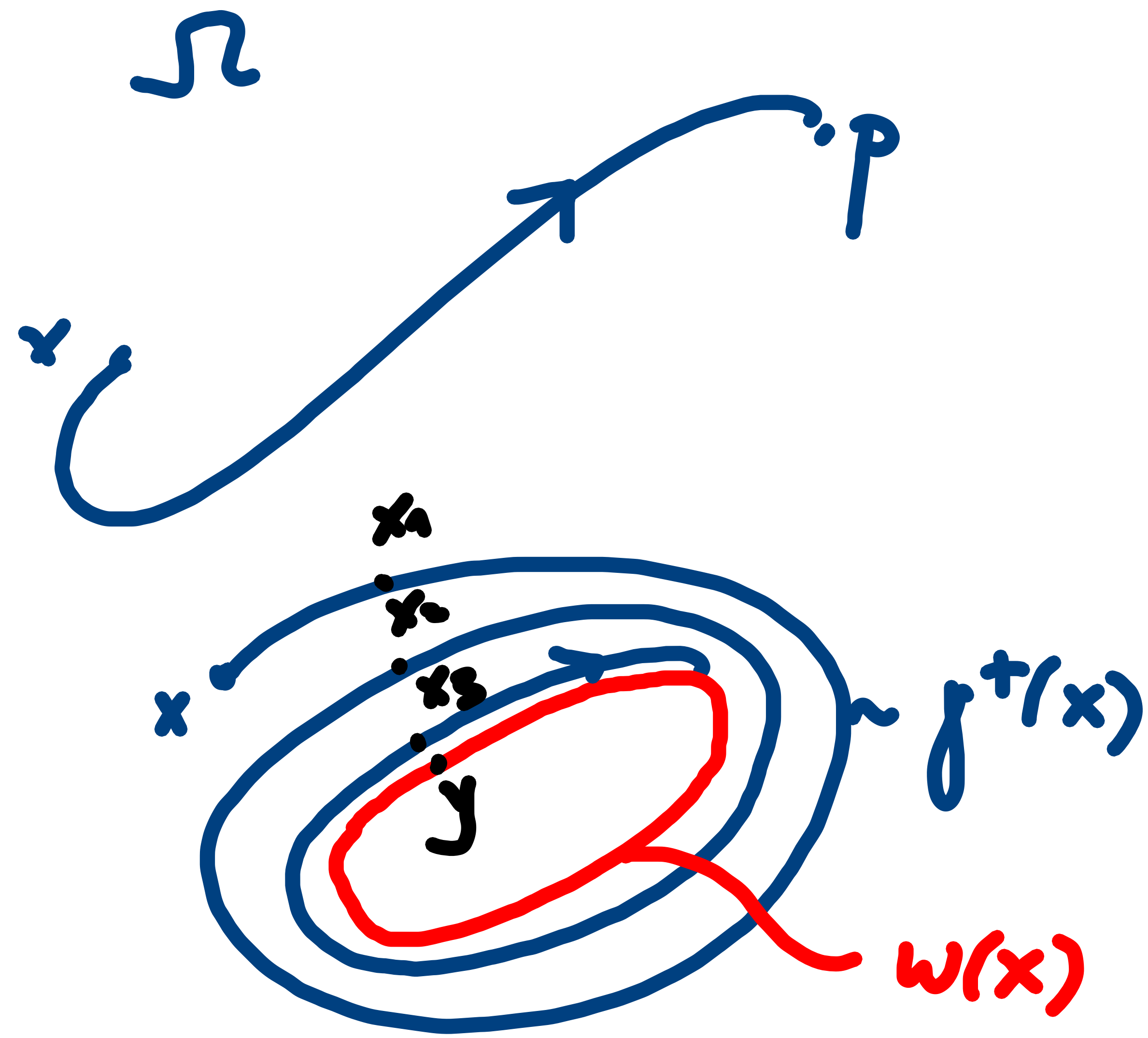
[Wh.: $\varphi = (\varphi^t)$ dyn. S. auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;

$x \in \Omega$; $y \in \Omega$

<u>ω-Limespunkt von x</u>

$:\Leftrightarrow \exists\, (t_j)$ in $[0, t_+(x))$ mit $(t_j) \to t_+(x)$ und

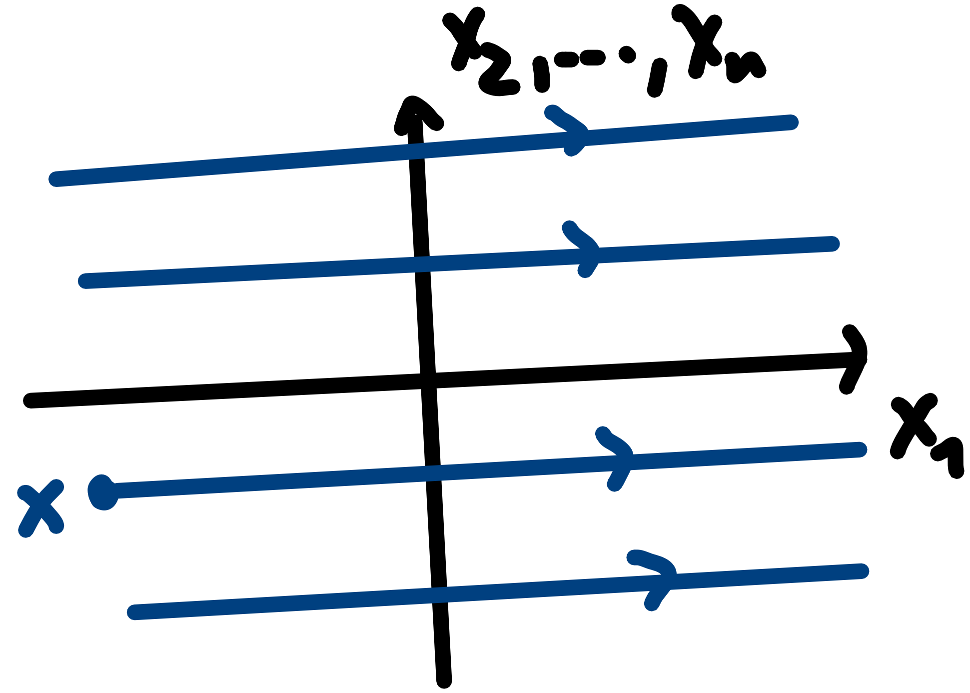
$$(\underbrace{\varphi^{t_j}(x)}_{x_j}) \to y.$$



$\omega(x) := \{ y \in \Omega : y$ ist ω-Limespkt.$\}$. ⌋

<u>Beobachtungen.</u> (a) Falls $t_+(x) < \infty$ ist, muss $\omega(x) = \emptyset$ sein. Da nämlich $t \mapsto \varphi^t(x)$ jedes Kompaktum verlässt, kann jede Folge $(\varphi^{t_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ mit $(t_j) \to t_+(x)$ keinen H.P. haben.

(b) Auch wenn $t_+(x) = \infty$ ist, kann $\omega(x) = \emptyset$ sein. Betrachte z.B. den Fluss φ zu $\dot{x} = e_1$. Dann folgt sicher: $\omega(x) = \emptyset$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

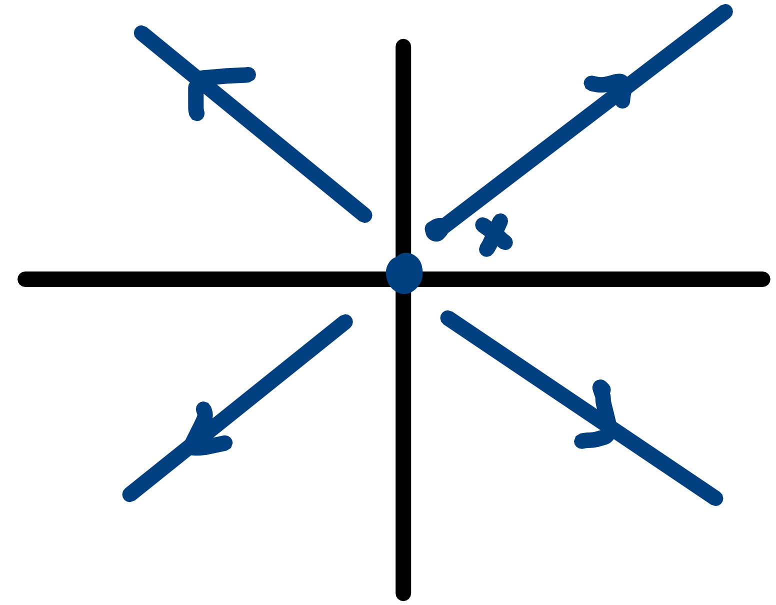


(c) Ist p eine Gl.-lage von φ, so ist natürlich

$$\omega(p) = \gamma(p) = \{p\}$$

(d) Ist φ das System zu $\dot{x} = x$ auf $\mathbb{R}^n$, so gilt offenbar:

$$\omega(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{für } x \neq 0 \\ \{0\}, & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$



(e) Ist $p \in \Omega$ periodisch, so ist

$$\omega(p) = \gamma(p),$$

denn $t \mapsto \varphi^t(p)$ durchläuft $\gamma(p) \subseteq \Omega$ wieder und wieder (ist $q = \varphi^s(p)$, so wähle $t_j = s + jT$ $(j \in \mathbb{N})$).

(f) Sei daher im Folgenden, wo wir Eigenschaften von $\omega(x) \subseteq \Omega$ zu untersuchen wollen, o.E.: $t_+(x) = \infty$.

Wir setzen für jedes $\tau > 0$

$$\Gamma_\tau(x) := \{ \varphi^t(x) \in \Omega : t \geq \tau \}.$$

das τ-Endstück von x; $\gamma^+(x) = \Gamma_0(x)$.

(g) Erinnere, dass für jedes $M \subseteq \Omega$ der Abschluss

$\overline{M}$ von M die kleinste abgeschlossene Obermenge von M ist,

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \text{ abg.} \\ A \supseteq M}} A$$

und es gilt: $y \in \overline{M} \iff \exists\, (x_j)$ in M : $(x_j) \longrightarrow y$.

<u>Lemma.</u>

$$\omega(x) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\Gamma_\tau(x)}$$

Beweis. „$\subseteq$": $y \in \omega(x)$; sei (t_j) in $\mathbb{R}_+$ mit $(t_j) \to \infty$ und $(\varphi^{t_j}(x)) \longrightarrow y$. $\Rightarrow$

$\exists j_0 \in \mathbb{N}\ \forall j \geq j_0 : t_j \geq \tau \Rightarrow \varphi^{t_j}(x) \in \Gamma_\tau,\ \forall j \geq j_0.$

$\Rightarrow$

$$y = \lim_{j \to \infty} \varphi^{t_j}(x) \in \overline{\Gamma_\tau}$$

Also: $y \in \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\Gamma_\tau}$.

„$\supseteq$": $y \in \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\Gamma_\tau}$, insbesondere $y \in \overline{\Gamma_j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists t_j \geq j : \quad |\varphi^{t_j}(x) - y| < \frac{1}{j}$

$\Rightarrow$ $(t_j) \to \infty$ und $(\varphi^{t_j}(x)) \longrightarrow y$,

d.h.: $y \in \omega(x)$.

$\square$

<u>Erinnere</u>: Wir nennen $M \subseteq \Omega$ <u>$+$-invariant</u>, wenn für alle $x \in M$ auch $\gamma^+(x) \subseteq M$ ist.

<u>Proposition</u>. Für jedes $x \in \Omega$ ist seine ω-Limesmenge

- abgeschlossen und
- $+$-invariant.

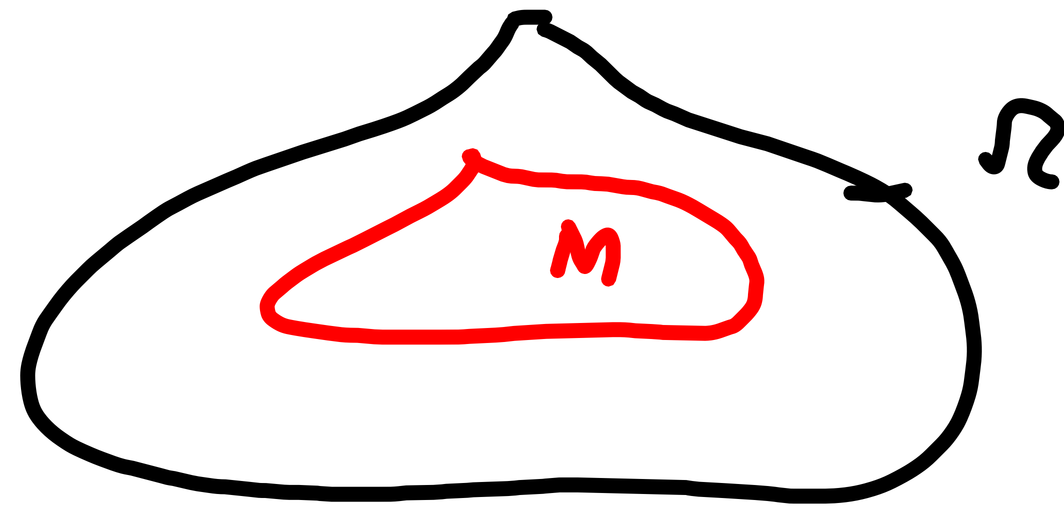
<u>Beweis.</u> (i) Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen. Lemma $\Rightarrow$ $\omega(x)$ ist abgeschlossen.

(ii) Sei nun $y \in \omega(x)$ und $0 \leq s < t_+(y)$ beliebig. Sei (t_j) Fge. in $\mathbb{R}_+$ mit $(\varphi^{t_j}(x)) \to y$ $\Rightarrow$

$$\varphi^s(y) = \varphi^s\left(\lim_{j\to\infty}\varphi^{t_j}(x)\right) \underset{\text{st.}}{\overset{\varphi^s}{=}} \lim_{j\to\infty}\left(\varphi^s \circ \varphi^{t_j}(x)\right)$$

$$\overset{\text{FE}}{=} \lim_{j\to\infty} \varphi^{t_j+s}(x) \in \omega(x), \text{ da } (t_j+s) \to \infty. \quad \blacksquare$$

Erinnere. Eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ heißt **relativ-kompakt in Ω**, falls $\overline{M} \subseteq \Omega$ und kompakt ist.



Kommentar. (a) M ist dann beschränkt und hat positiven Abstand zum Rand von Ω.

(b) $A \subseteq K$ abgeschlossen, K kompakt $\Rightarrow$ A kompakt.

Satz. Sei $\varphi = (\varphi^t)$ dyn. S. auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$. Ist die Bahn $\gamma^+(x) \subseteq \Omega$ relativ-kompakt, so gilt:

(a) $\omega(x)$ ist nicht-leer;

(b) $\omega(x)$ ist kompakt

(c) $\omega(x)$ ist zusammenhängend.

Beweis. (b) Da $\Gamma_0 = \gamma^+(x)$ ist, folgt, dass $\overline{\Gamma_0}$ nach Vor. kompakt ist. Da $\omega(x) \subseteq \overline{\Gamma_0}$ und abg., folgt: $\omega(x)$ ist kompakt.

(a) Sei $\underline{x_j} = \varphi^j(x) \in \Gamma_0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass (x_j) konvergiert: $(x_j) \longrightarrow y \in \overline{\Gamma}_0$.

$\Rightarrow y \in \omega(x) \neq \emptyset$.

(c) Sei $\omega(x) = \omega_1 \dot{\cup} \omega_2$ und ω_1, ω_2 abgeschlossen

Z.z.: $\omega_1 = \emptyset$ oder $\omega_2 = \emptyset$.

Da $\omega(x)$ kompakt ist, sind ω_1, ω_2 auch kompakt

$\Rightarrow$

$$d := d(\omega_1, \omega_2) = \inf\{\|y_1 - y_2\| \in [0,\infty) : y_1 \in \omega_1, y_2 \in \omega_2\} > 0$$

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebungen $U_1 \subseteq \Omega$ von ω_1, $U_2 \subseteq \Omega$ von ω_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (z.B. $U_1 = \{ x \in \Omega : d(x, \omega_1) < \frac{d}{2} \}$)

Beh.: $\exists \tau > 0 : \Gamma_\tau \subseteq U := U_1 \cup U_2$.

Wenn nicht: $\exists (t_j) \to \infty : \varphi^{t_j}(x) \notin U$. Nach Übergang zu einer Teilfolge darf man annehmen: $x_j := \varphi^{t_j}(x) \longrightarrow y \in \omega(x)$. Aber U ist off. Umg. von $\omega(x)$: $\lightning$.

Da Γ_τ Bild von $[\tau, \infty)$ unter dem stetigen $t \mapsto \varphi^t(x)$ ist, ist Γ_τ zus.-hgd.
$\Rightarrow$

$$\Gamma_\tau \subseteq U_1 \quad \text{oder} \quad \Gamma_\tau \subseteq U_2$$

(sonst würde $\Gamma_\tau \cap U_1$ und $\Gamma_\tau \cap U_2$ Γ_τ disjunkt zerlegen)
$\Rightarrow$

$$\overline{\Gamma_\tau} \cap U_2 = \emptyset \quad \text{oder} \quad \overline{\Gamma_\tau} \cap U_1 = \emptyset$$

o.E.: $\overline{\Gamma_\tau} \cap U_2 = \emptyset$.

Wegen $\overline{\Gamma}_t \subseteq \overline{\Gamma}_\tau$, $\forall\, t \geq \tau$, ist

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq \tau} \overline{\Gamma}_t \cap U_2 = \emptyset$$

$\Rightarrow$ $\omega_2 = \emptyset$.

$\blacksquare$

3.2. Limesmengen und Liapunov-Funktionen

<u>Satz</u>. Sei $\varphi = (\varphi^t)$ dyn. S. auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$G: \Omega \to \mathbb{R}$ Liapunov für φ <u>und</u> nach unten beschränkt. Sei $x \in \Omega$. Dann gilt:

(a) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) \subseteq G^{-1}(c)$$

(b) Für alle $y \in \omega(x)$ und $0 \leq t < t_+(x)$ gilt:

$$G(\varphi^t(y)) = G(y).$$

__Beweis.__ Sei o.E. $\omega(x) \neq \emptyset$ (wähle sonst $c < \inf G$).

(a) Da $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto G(\varphi^t(x))$ monoton fallend und n.u. beschränkt, existiert

$$c := \lim_{t \to \infty} G(\varphi^t(x))$$

Sei nun $y \in \omega(x)$ beliebig und $(t_j) \to \infty$ mit $(\varphi^{t_j}(x)) \to y \implies$

$$G(y) = G\left(\lim_{t \to \infty} \varphi^{t_j}(x)\right) = \lim_{j \to \infty} G(\varphi^{t_j}(x)) = c,$$

also

$$\omega(x) \subseteq G^{-1}(c)$$

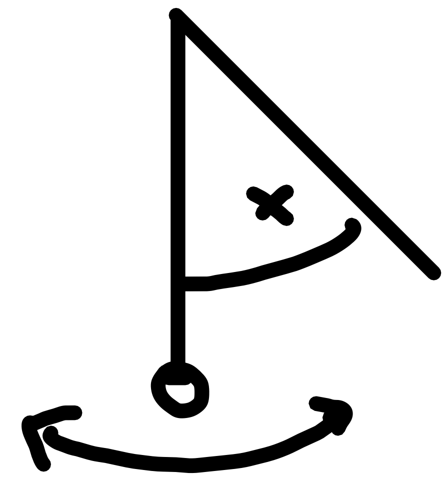
(b) Folgt aus (a), weil $\omega(x)$ fluss-invariant ist:
$y \in \omega(x) \Rightarrow \varphi^t(y) \in \omega(x)$, $\forall\, 0 \le t < t_+(y)$.

$\square$

Beispiele. (a) Das gedämpfte mathematische Pendel wird beschrieben durch

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

(bei $\gamma > 0$). Es ist dann $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,



$$G(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x$$

zwar, wie im ungedämpften Fall, kein 1. Integral mehr, aber immerhin noch eine Liapunov-Funktion, denn:

$$\frac{d}{dt} G(x(t),\dot{x}(t)) = \dot{x}\cdot\ddot{x} + \sin x \cdot \dot{x} = \dot{x}\left(-\gamma\dot{x} - \sin x + \sin x\right)$$
$$= -\gamma\dot{x}^2 \leq 0.$$

Wegen des Satzes ist für $(y, \dot{y}) \in \omega(x, \dot{x})$ sogar

$$0 = \frac{d}{dt} G(y(t), \dot{y}(t)) = -\gamma \dot{y}(t),$$

also $\dot{y}(t) = 0$, also auch $\ddot{y}(t) = 0 \implies \sin(y(t)) = 0$ $\implies y \in \mathbb{Z}\pi$ ist konstant $\implies y = k\pi$ ist Gl-lage des Systems $\implies \omega(x, \dot{x})$ ist einpunktig (da $\gamma(x)$ rel.-kompakt ist und daher $\omega(x) \neq \emptyset$).

(b) Sei

$$\dot{x} = -\operatorname{grad}(V)(x) \qquad (*)$$

Gradientensystem auf Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>und</u> V nach unten beschränkt. Wegen

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -\| \operatorname{grad} V(x)(t) \|^2 \leq 0$$

ist der Satz auf $G = V$ anwendbar und wie oben sieht man, dass jeder Limespunkt y von $x \in \Omega$ eine Gl.-lage ist. Insbesondere hat $(*)$ keine geschlossene Bahnen!

5.3. Lokale Scheiben und Fluss-Boxen

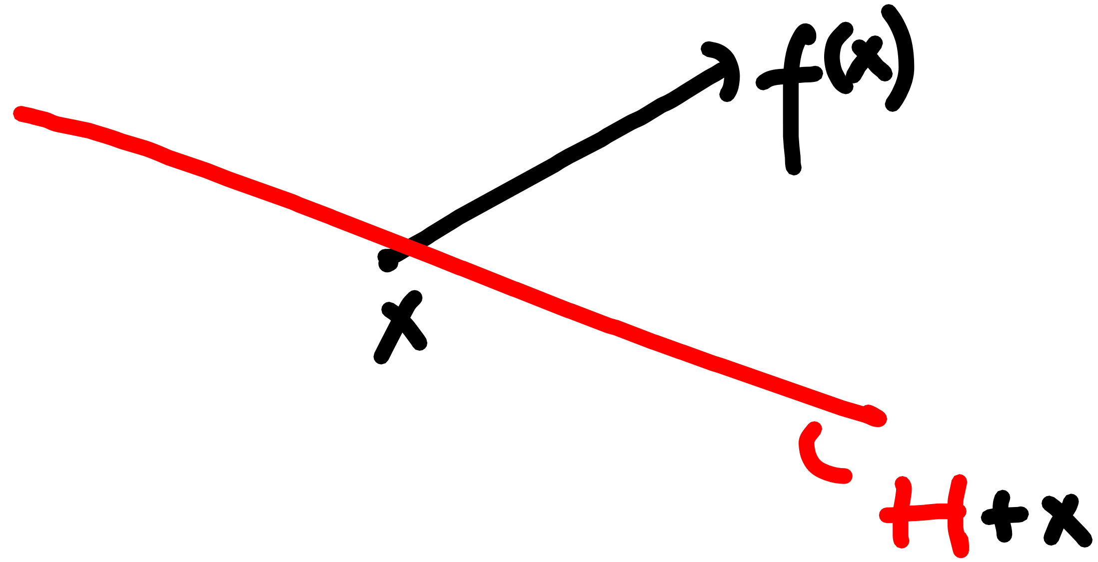
Wichtiges Konzept: Sei $\varphi = (\varphi^t)$ dyn. S. auf (Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ zu einem VF $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$ keine Gl.-lage, $f(x) \neq 0$. Dann können wir eine Hyperebene

$$H := \{ y \in \mathbb{R}^n : s(y) = 0 \}$$

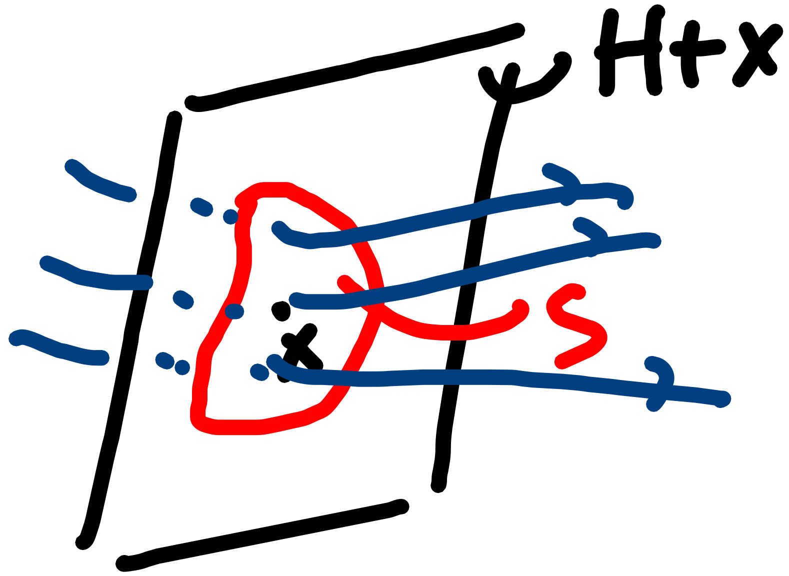
mit einem Linearen $s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(s \neq 0)$ wählen, so dass $f(x) \notin H$ ist (z.B. $f(x)^\perp$).

Ist nun

$$S \subseteq x + H = \{x + y : y \in H\}$$



eine offene Umgebung von x in der affinen Hyperebene $x+H$, so dass $f(y) \notin H$, $\forall y \in S$ (so etwas existiert, da f stetig ist), so sagen wir, dass <u>S transversal zu f liegt</u>.



Beobachtung: Indem wir S evtl. noch etwas verkleinern, können wir annehmen, dass wir einen Diffeomorphismus von

$$\mathcal{U} := (-\sigma,\sigma) \times B_\delta^{n-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\sigma > 0,\ \delta > 0)$$

auf eine offene Umgebung $V \subseteq \Omega$ von x finden,

$\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow V$, so dass Φ den linearen Fluss ψ,

$$\psi^t(y) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n)$$

auf $\mathcal{U}$, in den Fluss (φ^t), eingeschränkt auf V überführt,

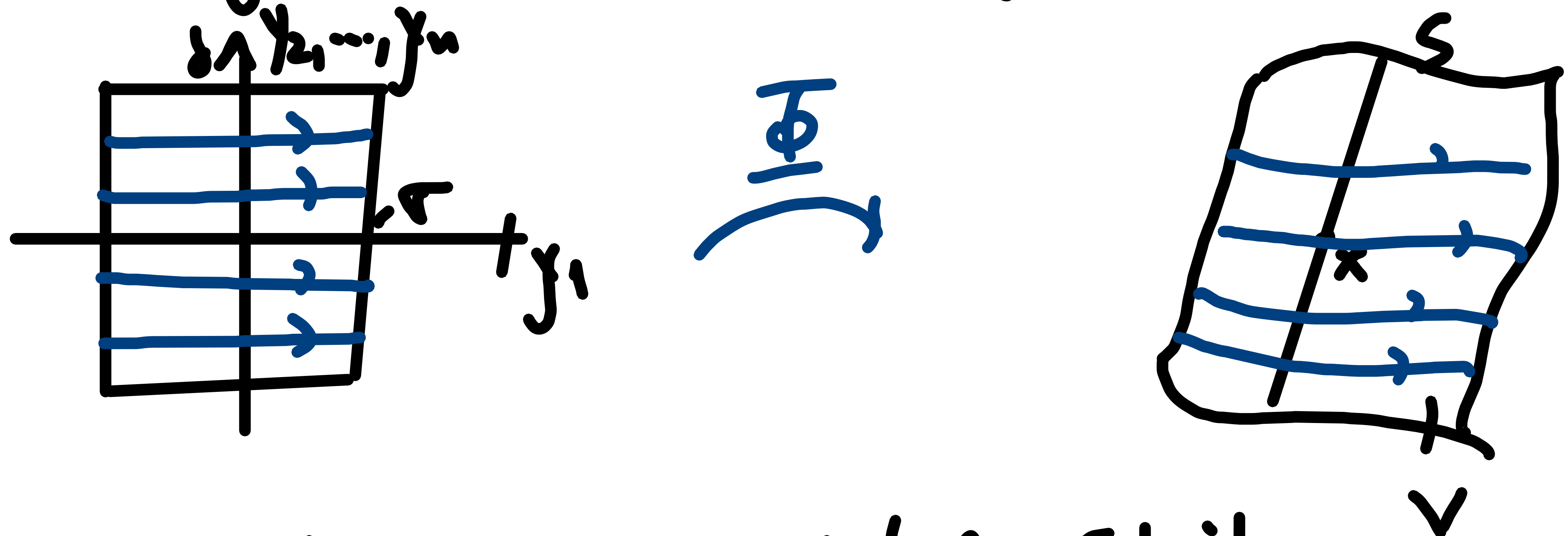
$$\varphi^t(\Phi(y)) = \Phi(y_1 + t, y_2, \dots, y_n)$$

und außerdem

$$\Phi(\{0\} \times B_\delta^{n-1}) = S$$

erfüllt.

(Vgl. den Satz über die Normalform von f in Umg. einer Nicht-Gl.-lage).



Wir nennen dann S eine lokale Scheibe an f und V eine Fluss-Box für f.

5.4. Der Satz von Poincaré-Bendixson