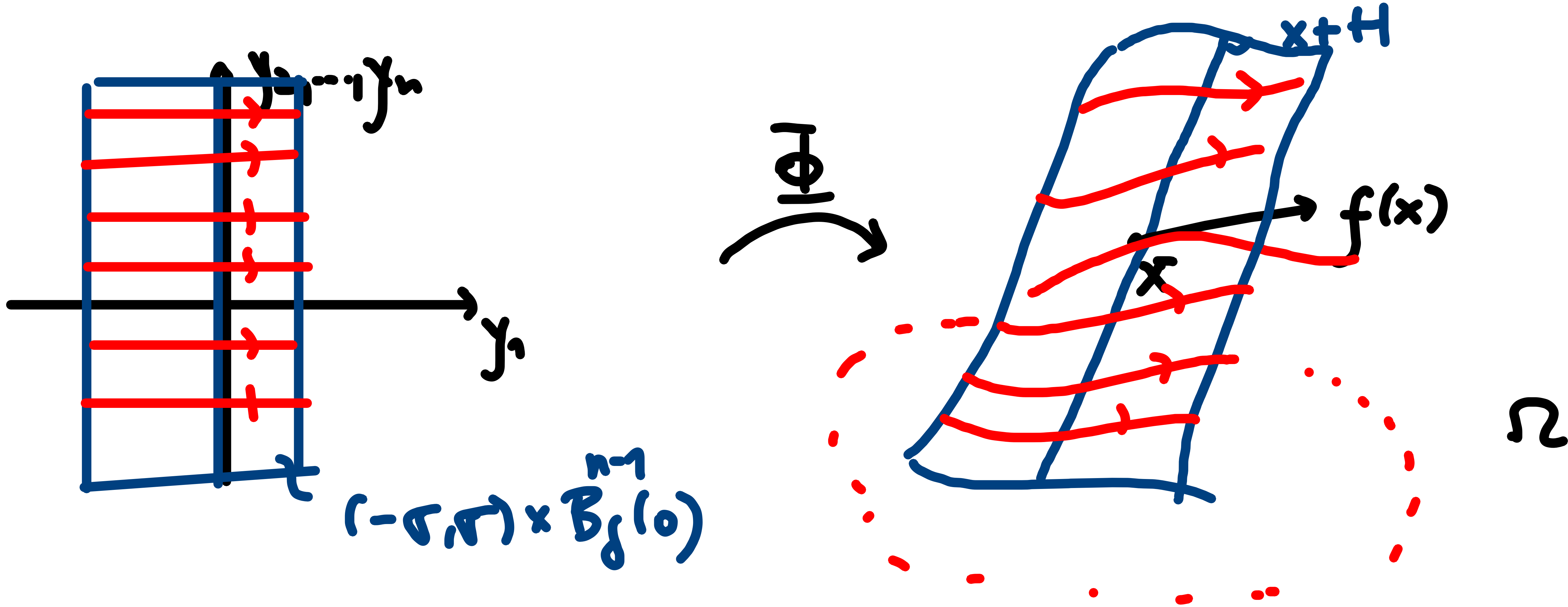
Vorlesung (11), 22.07.2022

5.4. Der Satz von Poincaré-Bendixson

Wh.:

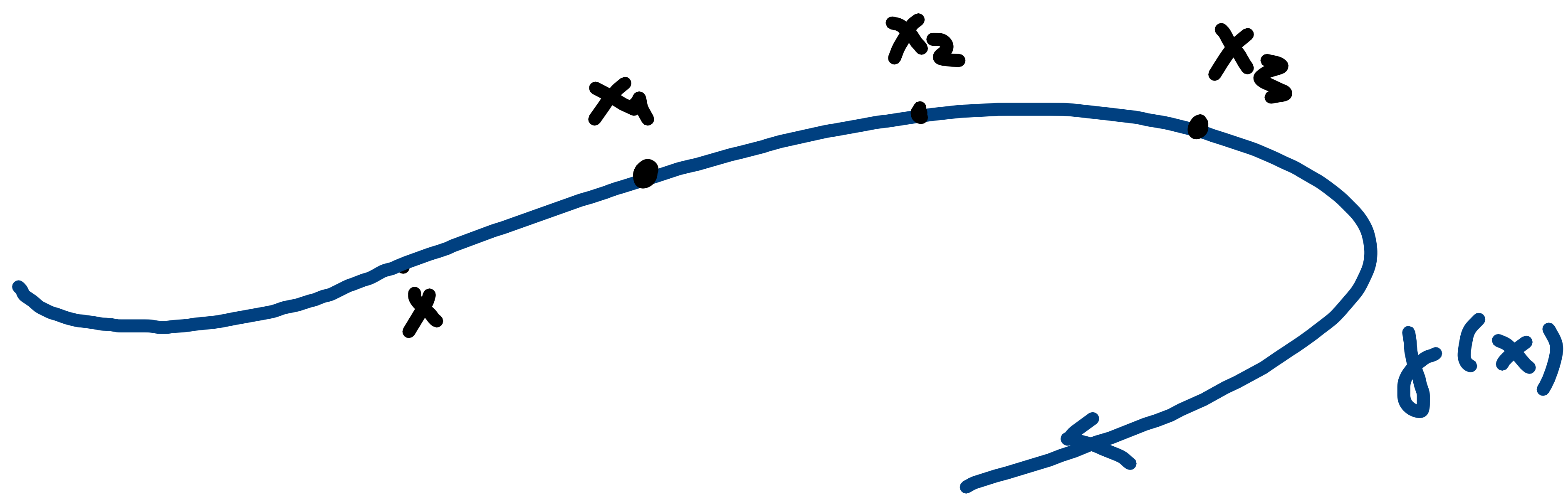


Ab jetzt nur noch: $n=2$.

Sei $\varphi=(\varphi^t)$ dyn. System auf $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ und $S\subseteq\Omega$ eine lokale Scheibe an φ. Sei $C=\gamma(x)\subseteq\Omega$ eine Bahn.

(a) Wir sagen, dass ein Tupel bzw. eine Folge $(x_j)_{j\in I}$, $I=\{1,\dots,N\}$ oder $I=\mathbb{N}$, auf C monoton liegt, wenn es ein Tupel bzw. eine Folge $(t_j)_{j\in I}$ in $I(x)$ gibt mit

- $x_j=\varphi^{t_j}(x)$, $\forall j\in I$
- $t_j<t_{j+1}$, $\forall j\in I$ bzw. $j=1,\dots,N-1$



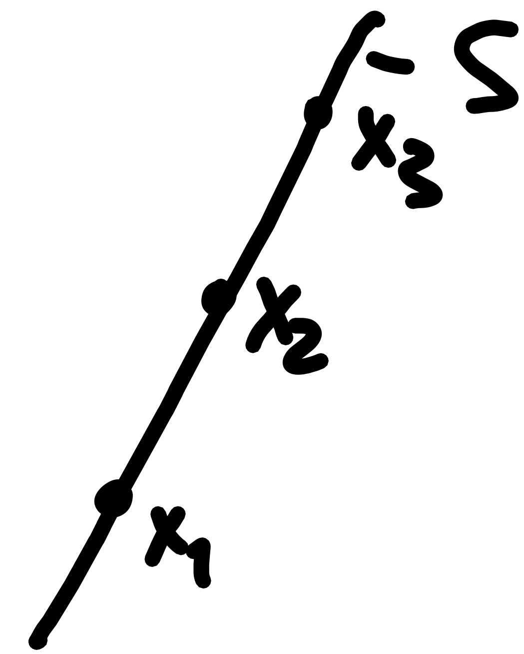
(b) Ist $(x_j)_{j\in I}$ ein Tupel bzw. eine Folge auf S,

$$S = \Phi\big(\{0\}\times(-\delta,\delta)\big),$$

so sagen wir, dass (x_j) monoton auf S liegt, falls es (s_j) in $(-\delta,\delta)$ gibt mit

- $x_j = \Phi(0, s_j)$

- (s_j) ist mon. wachsend oder monoton fallend

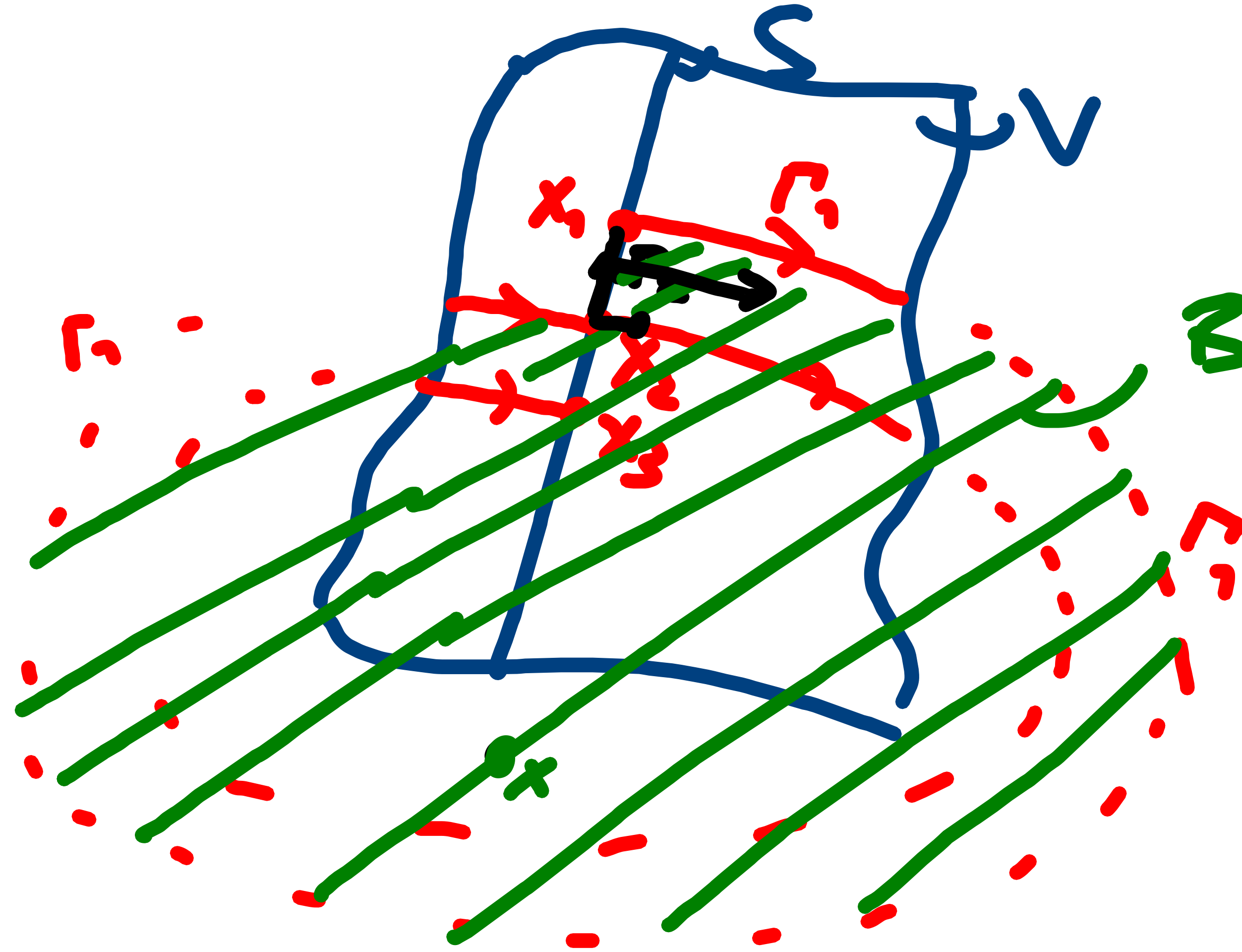


Lemma. Sei $S \subseteq \Omega$ lokale Schnitte für φ und $C = \gamma(x)$, $x \in \Omega$, eine Bahn von φ. Sind nun $x_1, x_2, x_3 \in C \cap S$ so, dass

- (x_1, x_2, x_3) monoton auf C liegt
- zwischen x_1 und x_2 liegt auf C kein

weiteren Punkt von C auf S

ist, so gilt: (x_1, x_2, x_3) ist auch monoton auf S.



Kommentar: Beachte, dass $\Gamma = \gamma(x)$ außerhalb von V „wild" sein kann.

Beweis. Sei also

$$x_j = \varphi^{t_j}(x) \qquad (j = 1,2,3)$$

und

$$t_1 < t_2 < t_3$$

und

$$x_j = \Phi(0, s_j) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Im Fall $s_1 = s_2$ ist die Aussage trivial, sei o.E.: $s_1 < s_2$. Z.z.: $s_2 < s_3$.

Bezeichne

$$\Gamma_1 := \{ \varphi^t(x) : t_1 \leq t < t_2 \} \subseteq C$$

$$\Gamma_2 := \{ \Phi(0,s) \in \Omega : s_1 < s \leq s_2 \} \subseteq S$$

Da zwischen x_1 und x_2 kein weiteren Durchstoßpunkt von Γ_1 mit S ist, ist

$$\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

eine einfach geschlossene Kurve (in $\mathbb{R}^2$). Außerhalb von V mag Γ „wild" aussehen, innerhalb von V besteht Γ aus drei aneinandergesetzten Stücken, die recht übersichtlich sind.

Der berühmte Jordansche Kurvensatz (s. z. B. Stöcker/Zieschang: Algebraische Topologie) besagt nun, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht, eine davon beschränkt, die andere unbeschränkt, und dass Γ der gemeinsame Rand,

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = B_1 \dot\cup B_2$$

(mit, sagen wir, $B := B_1$ beschränkt).

Wir sagen nun für $y \in \Gamma_2$, dass φ dort in B hineinzeigt, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\varphi^t(y) \in B$, $\forall\, 0 < t < \varepsilon$. Er zeigt aus B heraus, falls $\varphi^t(y) \notin B$, $\forall\, 0 < t < \varepsilon$, für ein $\varepsilon > 0$. Für jedes $y \in \Gamma_2$ trifft eine der beiden Alternativen zu, denn φ ist ja transversal zu Γ_2. Setzt man nun

$$\Gamma_2' := \{ y \in \Gamma_2 : \varphi \text{ zeigt in } y \text{ in } B \text{ hinein} \}$$
$$\Gamma_2'' := \{ y \in \Gamma_2 : \qquad\qquad\qquad\quad \text{aus } B \text{ heraus} \},$$

so ist also $\Gamma_2 = \Gamma_2' \dot{\cup} \Gamma_2''$ und Γ_2', Γ_2'' sind beide offen in Γ_2. Da Γ_2 zus.-hgd. ist, folgt: $\Gamma_2' = \emptyset$ oder $\Gamma_2'' = \emptyset$, sagen wir: $\Gamma_2 = \Gamma_2'$. Es folgt:

B ist flussinvariant!

Ist nämlich $z \in B$, so kann die Bahn von z

nicht Γ_1 kreuzen, da Γ_1 selbst Teil einer Bahn ist. Und Γ_2 auch nicht, da γ bei Γ_2 nach B hineinzeigt.

Zerlegt man nun S in die drei disjunkten Abschnitte

$$S_1 = \{ \Phi(0,s) \in S : -\delta < s < s_1 \}$$
$$S_2 = \{ \Phi(0,s) \in S : s_1 \leq s \leq s_2 \}$$
$$S_3 = \{ \Phi(0,s) \in S : s_2 < s < \delta \},$$

so ist klar, dass $S \cap B = S_3$ ist. Nun ist aber

$$x_3 = \varphi^{t_3}(x) = \varphi^{t_3 - t_2 - \varepsilon}\left(\varphi^{\varepsilon}(x_2)\right) \in B,$$

also

$$x_3 = \Phi(0, s_3) \quad \text{mit } s_3 > s_2 .$$

$\boxed{\text{///}}$

Korollar. Sei $S \subseteq \Omega$ eine lokale Scheibe und $x \in \Omega$. Dann kann $\omega(x) \cap S$ höchstens einen Punkt enthalten

Beweis. Da $\gamma(x) \cap S$ diskret ist, ist sie abzählbar. Wir nummerieren sie monoton auf C durch:

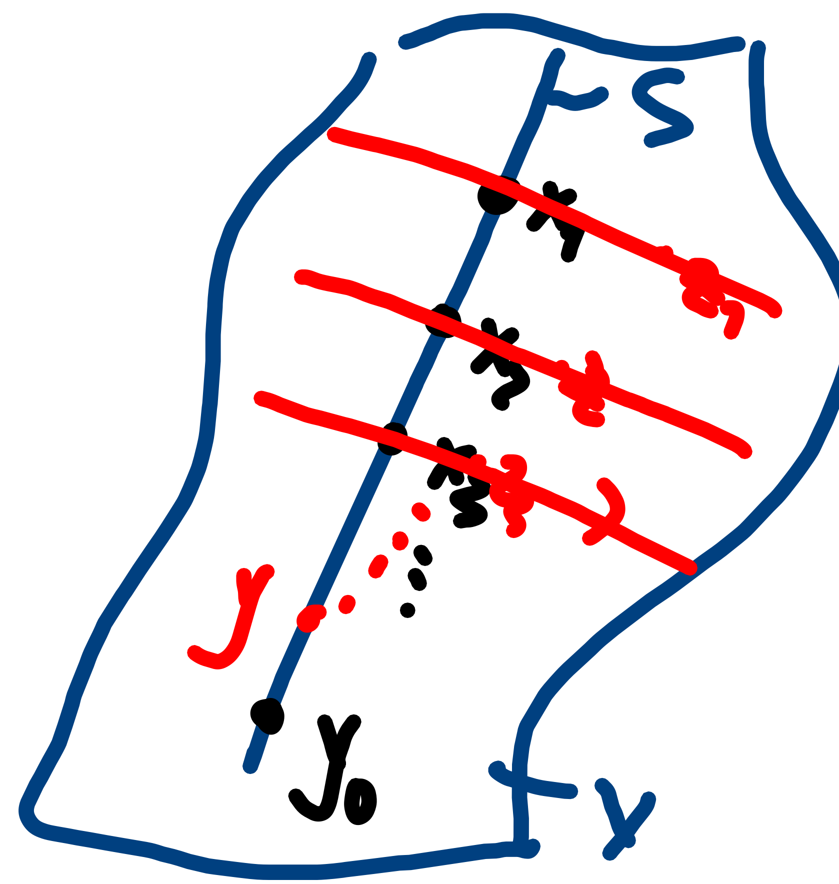
$$\gamma(x) \cap S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Mit dem Lemma ist $\gamma(x) \cap S$ dann auch monoton auf S, $x_j = \Phi(0, s_j)$ mit (s_j) monoton. Daher kann (s_j) in $(-\delta, \delta)$ höchstens einen H.P. haben, nennen wir ihn $y_0 \in S$.

Sei nun $y \in \omega(x) \cap S$ beliebig, also

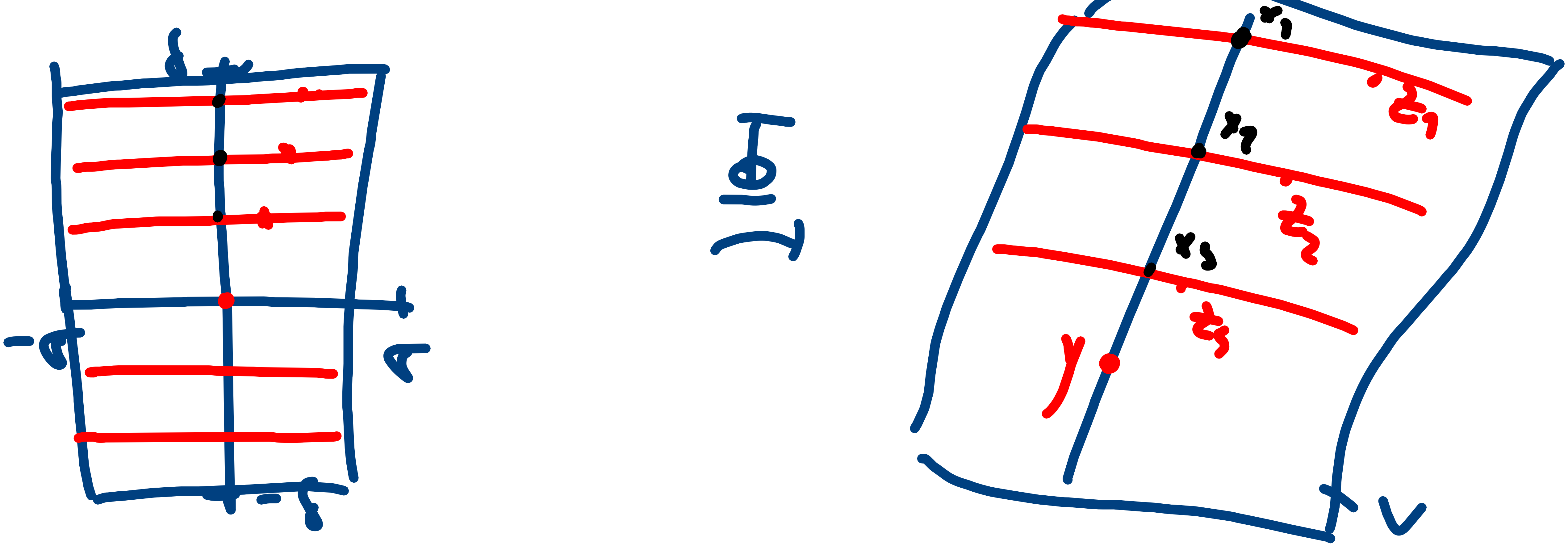
$$y = \lim (z_k)$$

mit $z_k = \varphi^{t_k}(x)$ und einer Folge $(t_k) \to \infty$. Sei V eine Flussbox



$$V = \Phi\big((-\sigma,\sigma)\times(-\delta,\delta)\big).$$

Wir dürfen annehmen, dass $z_k \in V$ ist, $\forall k \in \mathbb{N}$.



Nach Übergang von $z_k = \varphi^{t_k}(x)$ zu

$$x_k := \varphi^{t_k + s_k}(x)$$

mit $s_k \in (-\sigma, \sigma)$, ~~darf man annehmen~~ konvergiert auch $(x_k) \to y$. Es folgt: $y = y_0$

$\boxtimes$

Theorem (von Poincaré-Bendixson). Sei $\varphi = (\varphi^t)$ dyn. System auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\omega = \omega(x)$ eine ω-Limesmenge von φ mit

- ω ist kompakt
- $\omega \neq \emptyset$
- ω ohne Gl.-lagen.

Dann ist ω eine geschlossene Bahn.

<u>Beweis.</u> 1. Sei $y \in \omega(x)$ beliebig. Bch.: $\gamma(y)$ ist geschlossen.

Denn: $y \in \omega(x) \Longrightarrow \underline{\gamma(y)} \subseteq \omega(x)$

$\Rightarrow \omega(y) \subseteq \overline{\gamma(y)} \subseteq \overline{\omega(x)} = \omega(x)$,

da $\omega(x)$ abgeschlossen ist. Nach Vor. ist $\omega(x)$

kompakt $\Rightarrow$ $\omega(y)$ ist kompakt $\Rightarrow$ $\omega(y) \neq \emptyset$.
Sei $z \in \omega(y)$. Da z keine GL-lage ist, ex. eine lokale Scheibe $S \subseteq \Omega$ mit $z \in S$.
Sei $V \subseteq \Omega$ Flussbox dazu. Sei $z = \lim_j y_j$ mit

$$y_j = \varphi^{t_j}(y), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Wie im Beweis des Korollars oben dürfen wir annehmen, dass $y_j \in S$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Aber $\omega(x) \cap S$ besteht nur aus höchstens einem Punkt $\Rightarrow$ $y_j = z$, $\forall j \in \mathbb{N}$, insbesondere $y_1 = y_2$ (bei o.E. $t_1 \neq t_2$). Also ist $\gamma(y)$ geschlossen.

2. Sei nun $\gamma \subseteq \omega(x)$ geschlossene Bahn.
(Wir wollen zeigen, dass es keine weitere gibt.)
Wir wählen eine lokale Scheibe $S \subseteq \Omega$ an $y \in \gamma$.
o.E.: Sei x nicht periodisch (dann wäre $\omega(x) = \gamma(x)$ und der Satz richtig). Dann gibt es also $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\gamma^+(x)$,

$$x_j = \varphi^{t_j}(x), \quad \text{o.E.: } t_j < t_{j+1}, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

mit $(x_j) \longrightarrow y$. Wir dürfen wieder annehmen, dass x_j sogar aus S sind.

Behauptung: $\exists\, C>0 \;\; \forall j\in\mathbb{N}$:

$$t_{j+1}-t_j \le C \qquad (*)$$

~~Wählt man $\varepsilon>0$ klein genug, so liegt deshalb $\varphi^T(x_j)$~~

Dazu: Sei $T>0$ die Periode von y.
Da φ^T stetig ist und $(x_j)\to y$, existiert $j_0\in\mathbb{N}$, $\forall j\ge j_0$

$$\|\varphi^T(x_j)-y\| = \|\varphi^T(x_j)-\varphi^T(y)\| < \varepsilon .$$

Wählt man $\varepsilon>0$ klein genug, so liegt deshalb $\varphi^T(x_j)$

in einer Flussbox $V = \Phi((-\sigma,\sigma)\times(-\delta,\delta)) \subseteq \Omega$.
Dann gibt es auch $s_j \in (-\delta,\delta)$, so dass

$$\varphi^{T+s_j}(x_j) \in S$$

ist. Weil aber

$$x_{j+1} = \varphi^{t_{j+1}-t_j}(\varphi^{t_j}(x)) = \varphi^{t_{j+1}-t_j}(x_j)$$

der nächste Durchstoßpunkt nach von x_j von C durch S ist, gilt:

$$t_{j+1} - t_j \le T + s_j < T + \delta, \quad \forall j \ge j_0$$

$\to \exists C > 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$

$$t_{j+1} - t_j \leq C.$$

3. Schritt. Sei $\gamma \subseteq \omega(x)$ geschlossen.

Beh.: $\forall x$

$$\lim_{t \to \infty} d(\varphi^t(x), \gamma) = 0$$

Daraus folgt, dass $\omega(x)$ keine weiteren geschl. Bahnen hat, denn wäre $y \in \omega(x) \setminus \gamma$, $d := d(y, \gamma) > 0$, so wähle (t_j) mit $(t_j) \to \infty$ und $\varphi^{t_j}(x) \to y$.

$$d(\varphi^{t_j}(x), y) \geq \frac{d}{2}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Zur Beh.: Sei wieder $y \in \gamma$, $S \subseteq \Omega$ lokale Schnitte an y und

$$\gamma(x) \cap S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

mit $x_j = \varphi^{t_j}(x)$. Nach Schritt 2 gibt es ein $C > 0$ mit $t_{j+1} - t_j \leq C$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da φ stetig und damit glm stetig auf $[0, C] \times [-\delta, \delta]$ ist, existiert $\mu > 0$, so dass gilt:

$$\| \varphi^t(z) - \varphi^t(y) \| < \varepsilon, \quad \forall\, 0 \le t \le C$$

falls $\|z - y\| < \mu$ ist. $\Rightarrow \exists\, j_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall j \ge j_0$:

$$\| \varphi^{t_j}(x) - \varphi^t(y) \| < \varepsilon, \quad \forall\, 0 \le t \le C$$

Setze $t_0 := t_{j_0} \Rightarrow \forall\, t \ge t_0$ gilt: Wähle zunächst $j \in \mathbb{N}$ so, dass

$$t_j \le t < t_{j+1}.$$

$\Rightarrow$

$$d(\varphi^t(x), \gamma) \leq \| \varphi^t(x) - \varphi^{t-t_j}(y) \|$$

$$= \| \varphi^{t-t_j}(x_j) - \varphi^{t-t_j}(y) \| < \varepsilon,$$

weil $0 \leq t - t_j \leq C$ ist. D.h.:

$$\lim_{t \to \infty} d(\varphi^t(x), \gamma) = 0.$$

$\boxtimes$