Satz: Für eine komplexe oder reelle $n \times n$-Matrix N sind folgende Eigenschaften äquivalent (und können daher alle drei als definierende Eigenschaften von normalen Matrizen verwendet werden)

a) $N N^* = N^* N \quad \left(\text{bzw } [N, N^*] := NN^* - N^*N = 0\right)$

b) $\langle Nx, Ny \rangle = \langle N^*x, N^*y \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{R}^n)$

c) $\|Nx\|_2 = \|N^*x\|_2 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n$

Beweis: "a ⇒ b" $\langle Nx, Ny \rangle - \langle N^*x, N^*y \rangle = \langle x, N^*Ny \rangle - \langle x, NN^*y \rangle =$

$= \langle x, (N^*N - NN^*)y \rangle \overset{\text{Vorr.}}{=} 0 \quad \square$

"b) ⇒ c)" z.z. $\|Nx\|_2^2 = \|N^*x\|_2^2$ d.h. $\langle Nx, Nx \rangle = \langle N^*x, N^*x \rangle$

dies ist der Sonderfall "$x = y$" der Formel in b) $\square$

"c) ⇒ a)" Vorr: $\|Nx\|_2 = \|N^*x\|$ d.h. $\langle Nx, Nx \rangle = \langle N^*x, N^*x \rangle$

d.h $\langle x, (N^*N - NN^*)x \rangle = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n$

$A := N^*N - NN^*$ z.z. $\langle x, Ax \rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{C}^n \Rightarrow A = 0$

Wir zeigen nun, dass für selbstadjungierte Matrizen A (und $A := N^*N - NN^*$ ist ja selbstadjungiert) gilt:

$\langle x, Ax\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad A = 0.$

Es gilt: $\langle e_i, Ae_i\rangle = a_{ii}$

d.h. unter der genannten Bedingung sind alle Diagonaleinträge von A gleich 0.

WA: $\exists i \neq j$ mit $a_{ij} \neq 0$. Wähle $x = e_i + \lambda e_j$ (λ wählen wir später geschickt)

Vor.

$0 = \langle x, Ax\rangle = \langle e_i + \lambda e_j, A(e_i + \lambda e_j)\rangle = \cancel{\langle e_i, Ae_i\rangle} + \bar{\lambda}\langle e_j, Ae_i\rangle + \lambda\langle e_i, Ae_j\rangle$

$+ \cancel{\langle e_j, Ae_j\rangle} = \bar{\lambda} \cdot a_{ji} + \lambda a_{ij} = \bar{\lambda}\,\overline{a_{ij}} + \lambda a_{ij}$

geht nur, da Standardskp!

Wähle $\lambda = \overline{a_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = a_{ij}\overline{a_{ij}} + \overline{a_{ij}}a_{ij} = 2|a_{ij}|^2} \quad \lightning$

13 Eigenwerte und Eigenvektoren

Um das Wirken einer linearen Abbildung (auch anschaulich) hilft es, jene Vektoren herauszufinden, die von der Abbildung lediglich gestreckt oder gestaucht werden, d.h. ihre Richtung nicht ändern. Diese nennen wir Eigenvektoren, den entsprechenden Streckungsfaktor Eigenwert.

<u>Def</u>: Sei $f: V \to V$ linear. Falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in K$ existiert mit $f(v) = \lambda v$, dann nennt man λ Eigenwert und v Eigenvektor ("zum Eigenwert λ") von f.

Für jedes $\lambda \in K$ nennt man die Menge $\{v \in V : f(v) = \lambda v\} \ni \{0\}$ Eigenraum zum Eigenwert λ.

Ausnahme: Obwohl $f(v) = \lambda v$ für $v = 0$ und beliebiges λ immer gilt, nennt man 0 <u>nicht</u> Eigenvektor!

Bsp: a) Sei V der VR des ∞-oft $\overset{\text{diffbaren}}{\text{Funktionen}}$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Sei $D: V \to V$ gegeben durch $D(f) = f'$.

$f(x) := A \cdot e^{Cx}$ ergibt für alle $C \in \mathbb{R}$ und $A \neq 0$

ist ein Eigenvektor zum Eigenwert C, da:

$$f' = C \cdot f$$

Zu jedem $C \in \mathbb{R}$ haben wir also einen nicht trivialen Eigenraum.

b) Drehungen im $\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Für φ = gerades Vielfaches von π ist dies E_2

für φ = ungerades " " " " " $-E_2$

jeder Vektor im $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist dann EV zum EW $+1$ bzw -1.

Für alle anderen Winkel φ finden wir keine EV bzw EW.

Als Abbildung von $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ haben wir komplexe Eigenwerte (siehe unten)!

Satz: Die Eigenräume sind Untervektorräume.

Beweis: Wir müssen zeigen: Sei λ ein Eigenwert,

v, w Eigenvektoren zum Eigenwert λ und $\alpha \in K$.

Dann gilt: $v + w$ ist Eigenvektor zum EW λ

αv " " " " " .

(Fall $v = 0$ oder $w = 0$ ist trivial)

$$f(v+w) \underset{\text{f ist linear}}{=} f(v) + f(w) \underset{\text{Vor.}}{=} \lambda v + \lambda w \underset{\text{D-Gesetz}}{=} \lambda (v+w)$$

$$f(\alpha v) = \alpha \, f(v) = \alpha \cdot (\lambda v) = \lambda (\alpha v)$$

Ab sofort betrachten wir endlichdimensionale $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-VR,

$V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ $\quad f$ eine $n \times n$-Matrix.

Frage: Wie bestimme ich Eigenwerte und Eigenvektoren.

Wir suchen Lösungen von $A \cdot v - \lambda \cdot v = 0$

d.h $\boxed{(A - \lambda E_n)}\, v = 0$

λ ist also Eigenwert, wenn der Kern der Matrix $A - \lambda E_n$ Dimension > 0 hat.

<u>Korollar</u>: λ ist Eigenwert der Matrix A $\iff$ $\det(A - \lambda E_n) = 0$.

<u>Beweis</u>: $\det(A - \lambda E) = 0 \iff A - \lambda E$ ist nicht invertierbar $\iff A - \lambda E$ nicht bijektiv $\iff A - \lambda E$ hat nichttrivialen Kern,

d.h. $\exists\, v \neq 0$ mit $(A - \lambda E)\, v = 0$.

<u>Bem und Def</u>: Der Ausdruck $\det(A - \lambda E)$ ist für gegebene Matrix A ein Polynom vom Grad n in der Variablen λ.

Dieses Polynom nennt man charakteristisches Polynom.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind genau die Eigenwerte.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich sind die Eigenvektoren von A genau die EV von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, die entsprechenden EW werden einfach mit $\frac{\sqrt{2}}{2}$ multipliziert.

Im reellen hat (siehe oben) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ keine Eigenwerte.

Betrachten wir die Matrix also im Komplexen.

Char. Poly.: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

Die Matrix hat also die Eigenwerte $1+i$ und $1-i$.

A hat die EW $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$.