$Ax = b$, geg: A, b

$$(A \mid b) \xrightarrow{\text{Zeilentrafo}} \boxed{(\tilde{A} \mid \tilde{b})}$$ ohne Änderung von $\mathbb{L}$

Satz: Seien $A \in M(n \times n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
Falls A invertierbar dann hat $Ax = b$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1} b$

Beweis: Multiplikation von links mit A^{-1} ändert $\mathbb{L}$ nicht.

$$Ax = b \iff A^{-1} A x = A^{-1} b$$
$$\iff x = A^{-1} b$$

Korollar: Elementare Zeilenumformungen d.h. Multiplikation von links mit Elementarmatrizen i) ii) iii) und iv), ändern Kern der Matrix nicht. Kern ist Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$

<u>Definition</u>: Die Dimension des von den Zeilenvektoren aufgespannten Raumes nennt man auch <u>Zeilenrang</u> der Matrix.
Dementsprechend kann man den Rang der Matrix auch <u>Spaltenrang</u> nennen.

<u>Satz</u>: Für jede $n \times m$ - Matrix gilt: Spaltenrang = Zeilenrang.

<u>Beweis</u>: Elementare Zeilenumformungen ändern den Zeilenrang nicht! (Es reicht welche i) und ii) zu betrachten)
Die lineare Hülle der Zeilen bleibt unberührt:

$$v = \sum \alpha_i z_i \qquad \tilde{z}_i = \lambda z_i \Rightarrow z_i = \lambda^{-1} \tilde{z}_i$$

Zeilenvektoren

einsetzen.

bzw $\tilde{z}_i = z_i + z_j \Rightarrow z_i = \tilde{z}_i - z_j$

einsetzen.

Wie eben gezeigt ändert sich auch der Kern nicht!

$\Rightarrow$ auch der Rang ändert sich nicht, da

$$\operatorname{rang} A = \dim \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\parallel}}{V} - \dim \ker A$$

Wir bringen die Matrix auf Zeilenstufenform. Das ändert wie eben gesehen weder den Zeilenrang noch den (Spalten)rang.

In Zeilenstufenform lässt sich direkt ablesen, dass

Zeilenrang = Spaltenrang

$$\begin{pmatrix} \boxed{a} & b & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \boxed{c} & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\0\\0\end{matrix}}\right\} \text{lin unabhängig}$$

Spaltentransformationen

Wir haben oben vier Typen sogenannter Elementarmatrizen kennengelernt. Diese von <u>links</u> auf eine Matrix A multipliziert transformieren die Zeilen der Matrix.

Von rechts multipliziert transformieren diese Elementarmatrizen die Spalten von A. Dies sieht man mit Hilfe der Transponierten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Sei A eine Matrix, M eine Elementarmatrix. Wir betrachten:

$$A \cdot M = (A \cdot M)^{TT} = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Elementarmatrix}}}{M^T} A^T)^T$$

i) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = M = M^T$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & & \boxed{1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = M$

$a_{ij} = 1$ für i, j gegeben.

$a_{kk} = 1 \quad \forall k$

$a_{kl} = 0$ sonst

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \boxed{1} & & & 1 & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix, i und j werden vertauscht.

$$\underbrace{AM = (\underbrace{M^T A^T}_{\text{Zeilentrafo}})^T}_{\text{dann vertausche Zeilen} \leftrightarrow \text{Spalten.}}$$

<u>Satz</u>: Falls A invertierbar ist, so ist auch A^T invertierbar (und umgekehrt). (A ist quadratische Matrix)

<u>Beweis</u>: A inv.bar $\Leftrightarrow$ rang $A = n$ $\Leftrightarrow$ rang $A^T = n$ $\Leftrightarrow$ A^T invertierbar

8. Ähnlichkeit und Äquivalenz von Matrizen

Definition: Zwei Matrizen A und B heißen äquivalent, falls es invertierbare Matrizen S und T gibt, so dass

$$A = T B S.$$

(A und B müssen <u>nicht</u> quadratisch sein)

Zwei $n \times n$ Matrizen A und B heißen ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix T gibt, so dass

$$A = T^{-1} B T$$

Bemerkung: Die erste Eigenschaft bedeutet, dass A und B für die selbe lineare Abbildung stehen, nur in anderen Basen ausgedrückt.
$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \qquad T = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id), \qquad S = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}(id)$$

dann ist
$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f) \quad \circ \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f) \cdot M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}(id)$$

Bei der zweiten Eigenschaft betrachten wir darstellende Matrizen von Endomorphismen $f: V \to V$.

Es liegt nahe sich jeweils <u>eine</u> Basis von V auszusuchen

Beim Wechsel dieser erhält man eine ähnliche Matrix:

$$\boxed{A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)} \qquad M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id) = T \qquad T^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id)$$

$$\left(T\, T^{-1} = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id) = \mathbb{E} \right) \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad A = T^{-1} A\, T$$

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id), \quad \text{mit } \boxed{B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}$$

<u>Satz</u>: Die Ähnlichkeit und die „Äquivalenz" von Matrizen sind beides Äquivalenzrelationen.

<u>Beweis</u>: <u>„Ähnlichkeit"</u> i) „$A \mathrel{\hat{=}} A$" gilt, denn $A = \mathbb{E} A \mathbb{E}$ $\quad \mathbb{E} = \mathbb{E}^{-1}$

ii) „$A \mathrel{\hat{=}} B \Rightarrow B \mathrel{\hat{=}} A$" gilt: $A = T^{-1} B\, T \Rightarrow T A T^{-1} = B$ ✓

iii) „$A \mathrel{\hat{=}} B$ und $B \mathrel{\hat{=}} C \Rightarrow A \mathrel{\hat{=}} C$"

Sei $A \mathrel{\hat{=}} B$ und $B \mathrel{\hat{=}} C$ $\Rightarrow$ $\exists$ S, T invertierbar.

mit $A = T^{-1} B T$ $\quad$ $B = S^{-1} C S$

$$A = T^{-1} S^{-1} C S T = (S T)^{-1} C (S T)$$

"Äquivalenz": Beweis geht praktisch genauso.

<u>Satz</u>: Zwei Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang haben (und von der gleichen Form sind).

<u>Beweis</u>: Sei A eine $n \times m$-Matrix mit Rang r.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{B} = \{ b_1, \dots b_{n-r} \}$ eine Basis vom Kern von A.

Diesen erweitern wir zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{b_1, b_2 \dots b_{n-r}}_{\text{Basis vom Kern}}, b_{n-r+1}, \dots b_n \}$$

Im Dimensionssatz (dim V = dim Kern f + rang f) hatten wir im Beweis gesehen, dass die Vektoren

$$A b_{n-r+1}, \dots, A b_n$$ das Bild von A aufspannen (eine Basis des Bildes von A bilden)

Wir nennen diese Basis $\mathcal{A} = \{ A b_{n-r+1}, \dots, A b_n \}$

Wähle $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(A)$

$$B = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \end{matrix}}_{r\text{-Spalten}} & \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & \\ 0 & \vdots \\ 0 & \vdots \end{matrix} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Jede Matrix mit Rang r kann also so geschrieben werden, d.h. ist äquivalent zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & E_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wegen Äquivalenzeigenschaft folgt der Satz.