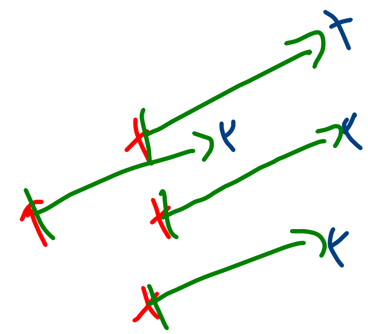
3 Vektorräume

Wir betrachten die Menge aller Verschiebungen in der euklidischen Ebene.



Diese bilden auf natürliche Weise eine Gruppe.

(neutrales: Versch. um 0, Inverse: vertausche "Fuß" und "Spitze")

Zusätzlich können wir Verschiebungen doppelt oder halb etc. ausführen. Jede Streckung (oder Stauchung) ist denkbar.

Man erhält in natürliche Weise eine äußere Verknüpfung von der $\underbrace{\text{Menge aller Proportionen}}_{\mathbb{R}}$ mal der Menge der Verschiebungen in letztere.

$(K, +, \cdot)$

<u>Definition</u>: Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung $(\oplus : V \times V \to V)$ und einer äußeren Verknüpfung $(\odot : K \times V \to V)$ heißt <u>Vektorraum</u>

$:\Longleftrightarrow$

a) $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe

b) Assoz.gesetz: $\beta \odot (\alpha \odot v) = (\beta \cdot \alpha) \odot v$

Multiplikation im Körper K.

c) Distributivgesetze: $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

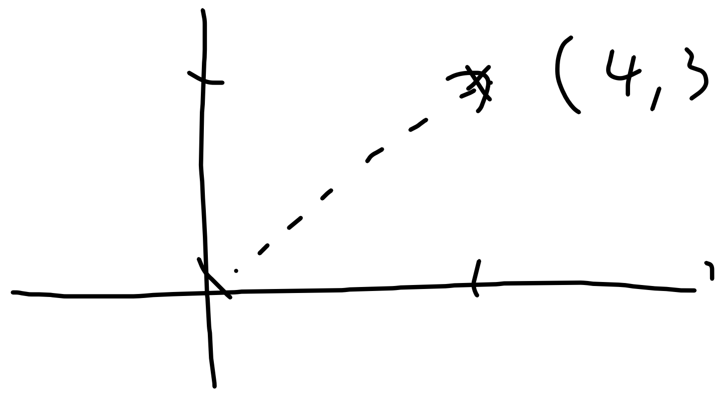
$\alpha \odot (v \oplus w) = (\alpha \odot v) \oplus (\alpha \odot w)$

d) $1 \odot v = v$.

<u>Beispiele</u>: a) Die Menge aller Verschiebungen bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit $\oplus$ Komposition von Verschiebungen, $\odot$ Streckung.

b) Die Menge aller Polynome mit reellen Koeff. bildet ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

c) Koordinatenraum.



Wie a), andere Bedeutung.

<u>Satz</u>: a) $\alpha \odot v = 0_V \iff \alpha = 0_K$ oder $v = 0_V$

b) $(-_K \alpha) \odot v = -_V (\alpha \odot v)$

<u>Beweis</u>: "a) $\Leftarrow$" 1. Fall: $\alpha = 0_K$: $0_V = 0_K \odot v \oplus (-_V(0_K \odot v)) =$

$= (0_K + 0_K) \odot v \oplus (-_V(0_K \odot v)) =$

$= 0_K \odot v \oplus 0_K \odot v \oplus (-_V(0_K \odot v)) =$

$= 0_K \odot v \oplus 0_V = 0_K \odot v$ $\square$

2. Fall: $v = 0_V$ ähnlich:

$$0_V = (\alpha \odot 0_V) \oplus (-_V (\alpha \odot 0_V)) =$$

$$= (\alpha \odot (0_V \oplus 0_V)) \oplus \ldots =$$

$$= \alpha \odot 0_V \oplus \underbrace{\alpha \odot 0_V \oplus \ldots}_{= 0_V}$$

$$= \alpha \odot 0_V \oplus 0_V =$$

$$= \alpha \odot 0_V \qquad \square$$

"a) ⇒": zu zeigen: Falls $\alpha \neq 0$ und $\alpha \odot v = 0_V \Rightarrow v = 0_V$

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \odot v = \alpha^{-1} \odot (\alpha \odot v) = \alpha^{-1} \odot 0_V \overset{a) \Leftarrow}{=} 0_V \quad \square$$

b) $$\underbrace{(\alpha +_K (-_K \alpha))}\odot v = \alpha \odot v \oplus (-_K \alpha) \odot v$$

$$= 0_K \odot v \overset{a)}{=} \boxed{0_V}$$

$\Rightarrow$ $(-_K \alpha) \odot v$ ist das Inverse bzgl. $\oplus$ von $\alpha \odot v$.

<u>Notation</u>: Wir schreiben von jetzt einfach $+$ und $\cdot$ für ~~...~~ sowohl die Verkn. im Körper, als auch $\oplus$ und $\odot$

Außerdem weiterhin Punkt vor Strich und

$v \cdot \alpha$ bedeutet $\alpha \odot v$.

<u>Definition</u>: Sei K ein Körper, $(V, +, \odot)$ ein VR über K.

Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq U \subset V$ heißt Untervektorraum

(von V) $:\Leftrightarrow$ a) $v + w \in U \quad \forall\, v, w \in U$

b) $\alpha \odot v \in U \quad \forall\, \alpha \in K,\ v \in U$.

<u>Satz</u>: Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum (bzgl. des selben Körpers)

<u>Beweis</u>: Wegen des letzten Satzes gilt: $0_V \in U$, weil $0_K \cdot v = 0_V$ (siehe b)

außerdem ist für jedes $u \in U$ $(-1) \odot u = -u$ auch in U

Die Rechenregeln (K.-G., A.-G.) gelten weiterhin, also ist

$(U, \oplus)$ abelsche Gruppe.

Ebenso gelten weiterhin die Vektorraumaxiome b). c). d).

$\oplus : U \times U \to U$ (wegen a) und $\odot : K \times U \to U$ wegen b)

"$\subset$" Teilmenge "$\subsetneq$" echte Teilmenge.

<u>Bsp</u>: Die Menge aller Parabeln (d.h. aller Polynome vom Grad höchstens 2) ist ein UVR der Menge aller Polynome.

$$p(x) = a x^2 + b x + c$$

a) $\alpha \cdot p(x) = \alpha a x^2 + \alpha b x + \alpha c$ ist wieder Parabel $\forall \alpha \in K$

b) $p(x) + q(x) = (a x^2 + b x + c) + (d x^2 + e x + f) = \dots$ auch.

4. Erzeugendensysteme

<u>Definition</u>: Sei K Körper, V sei K-Vektorraum. Sei $E \subset V$.

Die Menge $\operatorname{span}(E) := \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ mit } \begin{array}{l} \alpha_i \in K \\ e_i \in E \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

nennt man <u>lineare Hülle</u> von E.

<u>Satz</u>: $\operatorname{span}(E)$ ist ein Untervektorraum von V.

Bsp: Sei P die Menge aller Polynome.

$E = \{ x^2+3, \quad x^4, \quad x+1 \}$

$\mathrm{span}(E) = \{ a(x^2+3) + b x^4 + c(x+1)$ mit $a,b,c \in \mathbb{R} \}$

Beweis: span(E) ist Teilmenge von V, da man mit ⊕ und ⊙ den Vektorraum nicht verlässt.

Falls $v, w \in \mathrm{span}(E) \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \qquad w = \sum_{k=1}^{m} \beta_k e_k$

a) $v + w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot e_k = \sum_{\ell=1}^{p} \gamma_\ell e_\ell$

γ_ℓ ist entweder eines der α oder β oder deren Summe.

b) $\alpha \cdot v = \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha \cdot \alpha_j) \cdot e_j$.

Bem: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ nennt man auch Linearkombination (von Elementen aus E)

Definition: Sei V ein K-VR, $E \subset V$.

Man nennt E Erzeugendensystem von V

$:\Longleftrightarrow \operatorname{span}(E) = V$.