Beispiele: a) $\{1, x-1, x^2, x^2+2\}$ erzeugt den VR aller Parabeln.

b) Betrachte $\mathbb{R}$ als VR über $\mathbb{Q}$.

$$v + w \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad v, w \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \cdot v \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{Q} \text{ und } v \in \mathbb{R}$$

Jedes offene Intervall ist ~~E~~ Erzeugendensystem.

Satz: Sei V ein VR. Falls $E \subset V$ ein minimales Erzeugendensystem von V ist, so lässt sich jedes Element aus V in eindeutiger Weise als Linearkombination von Elementen aus E darstellen.

„Minimales ES" bedeutet, dass E ES ist und jede Teilmenge von E nicht mehr.

Bemerkung: Gegeben ein minimales Erzeugendensystem.

Nun können wir den VR mit Koordinaten versehen, d.h. jeder Vektor $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ in eindeutiger Weise. Wir können v darstellen durch Angabe ~~der~~ α_j.

z.B. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ falls $|E| < \infty$.

Konkret: Sei $f(x) = x^2 - 2x + 7$

$E = \{1, x-1, x^2\}$ dann hat f die Koordinaten $(5, -2, 1)$ denn $5 \cdot 1 + (-2)(x-1) + 1 \cdot x^2 = x^2 - 2x + 7$

klar

$A \Rightarrow B$

$\bar{A} \Leftarrow \bar{B}$

Beweis: „E minimales ES $\Leftrightarrow$ jedes v eindeutig darstellbar"

: z.z. E ist nicht minimal $\Leftarrow$ mind. ein $v \in V$ ist auf mind zwei unterschiedliche Arten darstellbar.

„$\Rightarrow$" Annahme $\exists\, e \in E$ so dass $E \setminus \{e\}$ bereits ES ist.

$\Rightarrow e = \sum \alpha_j e_j$ mit $e_j \in E \setminus \{e\}$, e ist also auf mind 2 Arten darstellbar.

"$\Leftarrow$" Sei $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ (*)

mit $\alpha_j \neq \beta_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots n\}$

z. z. E ist nicht minimal.

(*) $\Rightarrow$ $$0 = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) \cdot e_j \quad \Big| : (\alpha_k - \beta_k)$$

es gibt ein $k \in \{1, \dots n\}$ mit $(\alpha_k - \beta_k) \neq 0$

$$e_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\alpha_j - \beta_j}{\alpha_k - \beta_k} \cdot e_j$$

$\Rightarrow$ $E \setminus \{e_k\}$ ist ebenfalls ES.

$$v = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j e_j = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \gamma_j e_j + \gamma_k \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \frac{\alpha_j - \beta_j}{\alpha_k - \beta_k} e_j \right)}_{\text{lin. Komb aus Elementen von } E \setminus \{e_k\}}$$

Da $E \setminus \{e_k\}$ bereits ES ist, ist E kein minimales ~~EZ~~ ES $\square$

5. Basis, lineare Unabhängigkeit

<u>Notation</u>: Ein minimales Erzeugendensystem nennt man auch <u>Basis</u> (des VR).

<u>Definition</u>: Eine Teilmenge $T \subset V$ eines VR V heißt <u>linear unabhängig</u> $:\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j t_j = 0$ für $t_j \in T$, $n \in \mathbb{N}$

$t_j \neq t_k$ falls $j \neq k$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

<u>Satz</u>: Sei $B \subset V$, V ein VR. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

a) B ist minimales ES

b) Jeder Vektor in V ist in eindeutiger Weise als Linearkombination von Elementen aus B ausdrückbar (Koordinatisierung)

c) B ist lin. unabhängig und ES

d) B ist maximale lin. unabhängige Menge.

<u>Bemerkung</u>: Jede dieser Eigenschaften kann also als Definition des Begriffs "Basis" verwendet werden.

"Maximal linear unabhängig" bedeutet, dass B lin. unabh. ist und jedes $C \supsetneq B$ diese Eigenschaft verliert.

<u>Beweis</u>: a) $\Leftrightarrow$ b) hatten wir bereits.

$$\begin{array}{ccc} b & \Leftrightarrow & a \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ d & \Leftrightarrow & c \end{array}$$

z.z. $a) \overset{1.}{\Rightarrow} c) \overset{2.}{\Rightarrow} d) \overset{3.}{\Rightarrow} b)$

"$a \Rightarrow c$" Sei B minimales ES. z.z.: B ist linear unabh.

WA: B ist nicht lin. unabhängig $\Rightarrow$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j, \quad b_j \in B \quad \text{mind. ein } \alpha_k \neq 0, \; k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Big| : \alpha_k$$

$$b_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} b_j \quad \text{(wie oben)}$$

$\Rightarrow B \setminus \{b_k\}$ ist ES (wie oben) ↯ $\square$

"c $\Rightarrow$ d" Sei B lin unabhängiges ES.

z.z. für beliebiges $v \in V$, $v \notin B$ ist $B \cup \{v\}$ lin. abh.

Sei also $0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j + \alpha v$

Idee

mit $v_j \in B$

z.z. mindestens eines der α_j oder α kann $\neq 0$ gewählt werden. Bsp.: $\alpha = 1$

B ist ein ES, daher lässt sich ~~jedes~~ $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ für geeignete $\alpha_j \in K$, $v_j \in B$ Beweis

$\Rightarrow$ $\Rightarrow 0 = -v + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow B \cup \{v\}$ lin. abh.

d) $\Rightarrow$ b) : Sei B maximal lin. unabh. z.z: jeder Vektor ist eindeutig als lin. Komb. darstellbar.

1) Darstellbarkeit: WA: Sei $v \in V$ der nicht als lin. Kombination von Elementen aus B geschrieben werden kann.

$$v \neq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_j \in B,\ \alpha_j \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j - v \neq 0$ für alle $v_j \in V$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $B \cup \{v\}$ ist ebenfalls linear unabhängig.

$(*)$ $\sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k = 0$ 1. Fall: $v_k \neq v$ $\forall k$ oder der entsprechende Faktor 0

$\Rightarrow$ $\beta_k = 0$ $\forall k$, da B Basis

2. Fall: Vorfaktor von $v \neq 0$ z.B. $v_\ell = v$, $\beta_\ell \neq 0$

$(*)$ $\sum_{k=1}^{m} -\frac{\beta_k}{\beta_\ell} v_k + v = 0$ ↯

Eindeutigkeit: WA: Sei $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$

und mind. ein $\alpha_j \neq \beta_j$

$\Rightarrow$ $0 = \sum (\alpha_j - \beta_j) v_k$ mind. ein $\alpha_j - \beta_j \neq 0$ $\Rightarrow$ B ist lin. abhängig ↯.