Satz: a) $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ (Cauchy-Schwarz)

b) $\|x+y\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$ (Δ-Ungl)

Beweis: a) Wir zerlegen $y = \alpha x + x^\perp$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
und $x^\perp \perp x$ d.h. $\langle x^\perp, x\rangle = 0$

Dies geht immer: $\langle x, y - \alpha x\rangle = 0$

$$\langle x,y\rangle - \alpha\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow \alpha := \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$$

Wir nehmen hier an, dass $x \neq 0$. Für $x = 0$ folgt a) direkt.

$$x^\perp := y - \alpha x \,.$$

Es gilt: $\langle y,y\rangle = \langle \alpha x + x^\perp, \alpha x + x^\perp\rangle = \bar\alpha\alpha\langle x,x\rangle + 0 + 0 + \underbrace{\langle x^\perp, x^\perp\rangle}_{\ge 0}$

$\Rightarrow \langle y,y\rangle \ge |\alpha|^2\langle x,x\rangle$

$\langle x,y\rangle = \langle x, \alpha x + x^\perp\rangle = \alpha\langle x,x\rangle$

$$|\langle \alpha, y \rangle|^2 = \boxed{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle^2}$$

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle \qquad \|y\|_2^2 = \langle y, y \rangle \geqq |\alpha|^2 \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \qquad \square$$

b) $$\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\leq \|x\|_2^2 + |\langle x, y \rangle| + |\langle y, x \rangle| + \|y\|_2^2 \underset{C.S.}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$= (\|\alpha\|_2 + \|y\|_2)^2 \qquad \Big| \cdot \sqrt{}$$

$$\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 .$$

<u>Definition</u>: Sei V ein $\mathbb{R}$- (oder $\mathbb{C}$-) Vektorraum mit Skalarprodukt.

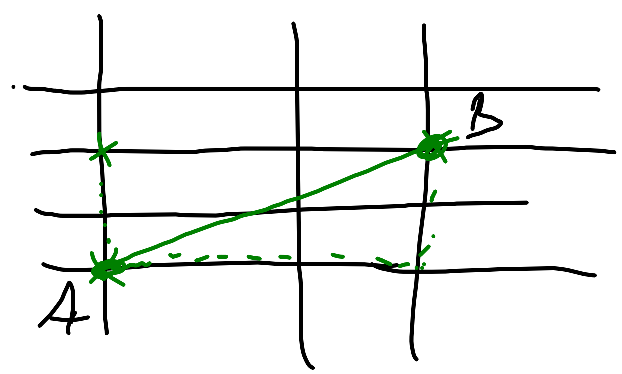
Wir definieren den Winkel zwischen zwei Vektoren $a, b \in V$ über:

$$\alpha := \operatorname{acos} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$$

Bemerkung: Cauchy-Schwarz ergibt, dass $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2} \in [-1, 1] \Rightarrow$ acos... wohldef.

1.1 Normen

Wir haben oben mit Hilfe des Skalarproduktes über die Länge von Vektoren $\|x\|_2$ gesprochen. Es gibt auch andere Längenbegriffe



Wir denken an eine Stadt mit orthogonalem Straßenmuster, eine Person steht am Punkt A und möchte eine Freundin bei Punkt B besuchen. Der relevante Abstandsbegriff ist <u>nicht</u> der euklidische.

Oder wir wollen sehen, ob B zu Hause ist. Dies führt wieder zu einem anderen Abstandsbegriff.

Wir abstrahieren nun den zu Grunde liegenden Längenbegriff.

Definition: Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ nennt man

Norm $:\Leftrightarrow$

a) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (positiv definit)

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in V.$ (homogen)

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ-Ungleichung)

Bemerkung: $\underset{\uparrow \text{ Nullvektor}}{\|0\|} = \|\underset{\uparrow \text{ Null im Körper}}{0} \cdot x\| \overset{b)}{=} 0 \cdot \|x\| = 0$. Dies braucht man also in a) nicht fordern.

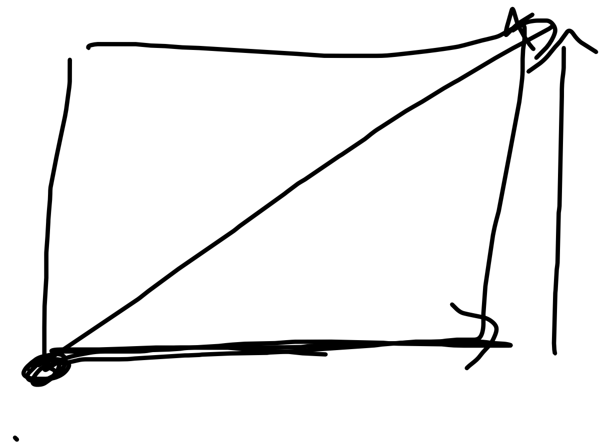
Beispiele a) $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

a) folgt aus pos. def des $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

b) $\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\overline{\lambda} \lambda \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|_2$ ✓

c) hatten wir im Satz vorhin.

b) $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$



$V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Offensichtlich ist $\|x\|_1 \geq 0$, $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. a)

b: $\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \lambda \|x\|_1$

c: $\|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

c) $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x|_j^p}$ für $p \geq 1$

d) $\|x\|_\infty := \overset{\max}{\sup_{1 \leq j \leq n}} \{|x_j|\}$

e) $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p \, dx}$

12. Adjungiertheit

Sei V ein reeller oder komplexer, endlich dimensionaler Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ (bzw nach $\mathbb{C}$) ein Skalarprodukt. Wir möchten nun Aussagen über das Skalarprodukt mit den linearen Abbildungen zusammenbringen.

<u>Def</u>: Sei in obigem Setting $f : V \to V$ linear. Dann nennt man eine Abbildung $f^{adj} : V \to V$ die adjungierte von f $:\Leftrightarrow$

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f^{adj}(x), y \rangle .$$

Ist die Adjungierte eindeutig? Existiert immer eine Adjungierte? Wie sieht sie aus? All das lässt sich am schönsten beantworten, wenn wir V in einer ONB darstellen. Dann ist $\langle , \rangle$ simpel und in jeder Situation gleich dem Standardskalarprodukt, eine beliebige, lineare Abbildung f entspricht einer bel. $n \times n$ Matrix.

Sei also $\langle , \rangle$ das Standardskalarprodukt, $A \in M(n \times n)$

$\Rightarrow \quad \langle x, Ay \rangle = x^t (A y)$

$\langle Bx, y \rangle = (Bx)^t y = x^t B^t y$

Falls wir $B = A^t$ folgt also, dass $\langle x, Ay \rangle = \langle A^t x, y \rangle$

Wir sehen also: In der ONB dargestellt ist die adjungierte gleich der transponierten. Die Existenz und Eindeutigkeit ist dadurch klar.

<u>Definition</u>: Eine lineare Abbildung, die ihrer adjungierten gleicht nennt man selbstadjungiert.

<u>Bem</u>: In der ONB dargestellt gilt im selbstadjungierten Fall

$A^t = A$.