$\rightarrow$ $\langle x, f(y) \rangle = \langle f^{adj}(x), y \rangle$

f^{adj} ist die adj von f

($f^* = f^{adj}$ andere Bez.)

A Matrix, Stand skp. $\boxed{A^{adj} = A^t}$

Beispiel: Sei V der VR der linearen Funktionen

$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$

Keine ONB $B = (1, x)$

Lineare Abbildung: Ableitung " ' "

Dargestellt in B ist Ableitung gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sei $f = mx + t$ und $g = ax + b$

$\langle g, f' \rangle = \int_0^1 (ax + b) \cdot m\, dx = m \cdot \frac{a}{2} + m \cdot b$

Gesucht: $h = cx + d$ so dass $\langle h, f \rangle = \frac{ma}{2} + bm$

$h = A^{adj}(g)$ (A steht für Ableitung)

$$\langle h, f\rangle = \frac{ma}{2} + mb$$

$$= \int_0^1 (cx+d)(mx+t)\,dx = \int_0^1 cmx^2 + ctx + dmx + dt \quad dx =$$

$$= \frac{cm}{3} + \frac{ct}{2} + \frac{dm}{2} + dt = \frac{ma}{2} + mb \qquad \forall\, m, t$$

$$\mathrm{I}: \frac{c}{3} + \frac{d}{2} = \frac{a}{2} + b$$

$$\mathrm{II}: \frac{c}{2} + d = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = -2d \qquad \text{in } \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I}': -\frac{2}{3}d + \frac{d}{2} = \frac{a}{2} + b \qquad \Rightarrow \quad -\frac{1}{6}d = \frac{a}{2} + b \quad \Rightarrow \quad d = -3a - 6b$$

$$c = \frac{3}{2}a + 3b$$

Die darstellende Matrix von A^{adj} in Basis B ist also

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6b - 3a \\ 3b + \frac{3}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung</u>: Für ein allgemeines Skalarprodukt, bzw eine Darstellung in einer Basis, die keine ONB ist, ist die darstellende Matrix der Adjungierten nicht die transponiert-konjugierte Matrix A^t.

(Notation: A^t ist transponiert-konjugierte $a^t_{ij} = \overline{a_{ji}}$

A^T " transponierte $a^T_{ij} = a_{ji}$

A^* oder A^{adj} hängt von Skp. ab $\langle A^* x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$)

Wir werden ab sofort uns auf Darstellungen in einer ONB beschränken, dann brauchen wir die Unterscheidung A^*, A^t nicht zu machen.

<u>Satz</u>: a) $(f^*)^* = f$

b) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

c) $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$

$*$ kann hier als Adjunktion oder Transposition mit Konjunktion verstanden werden.

Beweis: a) und c) ist die identische Aussage.

c) folgt aus $\langle f(x), y \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \langle f^*(y), x \rangle$

$= \langle x, f^*(y) \rangle$

b) $\langle x, (f \circ g) y \rangle = \langle f^*(x), g(y) \rangle = \langle g^* \circ f^*(x), y \rangle$

$\Rightarrow g^* \circ f^* = (f \circ g)^*$

Definition: Gegeben sei ein $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt.

Eine Matrix $A \in M(n,n)$ heißt selbstadjungiert $:\Leftrightarrow A^* = A$

Eine invertierbare Matrix U heißt unitär $:\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$

(für $K = \mathbb{R}$ nennt man die unitären Matr. auch "orthogonale")

Satz: Sei U eine $n \times n$ Matrix. Dann ist äquivalent

a) U ist unitär

b) $\langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad (\mathbb{R}^n)$

c) $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

d) Die Spalten von U sind eine ONB von $\mathbb{C}^n$

Beweis: "a) $\Rightarrow$ b)" $\quad U^* = U^{-1} \quad \langle U(x), U(y) \rangle = \langle U^* U x, y \rangle =$

$$= \langle U^{-1} U x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

"b) $\Rightarrow$ c)" c) ist der Sonderfall $x = y$

$$\|Ux\|_2^2 = \langle U(x), U(x) \rangle \overset{3)}{=} \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

"c) $\Rightarrow$ d)" Es sei $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

Insbesondere ist $\|\underbrace{U e_j}_{j.\ \text{Spalte von } U}\| = \|e_j\| = 1 \quad \forall j$

WA: Sei $\overset{\text{z.B.}}{\vee}$ Spalte 1 und Spalte 2 nicht orthogonal.

d.h. $\langle U e_1, U e_2 \rangle = \lambda \neq 0$

Betrachte $x = e_1 + \bar{\lambda} e_2$

$\|Ux\|_2^2 = \langle Ue_1 + \bar{\lambda} Ue_2, Ue_1 + \bar{\lambda} Ue_2 \rangle =$

$= \langle Ue_1, Ue_1 \rangle + \lambda \underbrace{\langle Ue_2, Ue_1 \rangle}_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda} \underbrace{\langle Ue_1, Ue_2 \rangle}_{\lambda} +$

$+ \bar{\lambda}\lambda \langle Ue_2, Ue_2 \rangle =$

$= 1 + \lambda\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\lambda + \bar{\lambda}\cdot\lambda$

$\|x\|_2^2 = \langle e_1 + \bar{\lambda} e_2, e_1 + \bar{\lambda} e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + \lambda \langle e_2, e_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle e_1, e_2 \rangle + \lambda\bar{\lambda} \langle e_2, e_2 \rangle$

$= 1 + 0 + 0 + \lambda\bar{\lambda}$

Da $\lambda \neq 0$ ist $\lambda\bar{\lambda} \neq 0$ $\Rightarrow \|Ux\|_2^2 \neq \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|Ux\|_2 \neq \|x\|_2$ $\lightning$

Ebenso folgt die Orthogonalität von zwei bel. Spalten.

"d) $\Rightarrow$ a)" U^* ist die transponiert konjugierte von U

$(U^* \cdot U)_{ij} = (Ue_i)^+ \cdot Ue_j$, die Ue_i bilden nach

$= \delta_{ij}$ Vorr. d) eine ONB

$\Rightarrow U^* U = E_n \Rightarrow U^* = U^{-1}$ $\square$

Bemerkung: Unitäre Matrizen erhalten also Längen (und Winkel)

Bsp: Drehung im $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

b) und c) ist klar erfüllt, da Drehungen Längen und Winkel erhalten.

Die Spalten sind ONB: $\left\| \begin{pmatrix} \cos \\ \pm\sin \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\cos^2 + \sin^2} = 1$

$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \right\rangle = \cos \cdot \sin - \sin \cdot \cos = 0$

$U^* = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\qquad U^* \cdot U = \begin{pmatrix} \cos^2 + \sin^2 & \cos\sin - \sin\cos \\ \sin\cos - \cos\sin & \sin^2 + \cos^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Satz: Die Menge der unitären $n \times n$-Matrizen bilden eine Untergruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.

Beweis: E_n ist unitär und das neutrale El. dieser Gruppe

$$U \text{ unitär} \Rightarrow U^* = U^{-1} \Rightarrow U^{**} = (U^{-1})^* = U$$
$$= (U^{-1})^{-1}$$

$\Rightarrow$ U^{-1} ist ebenfalls unitär.

Es gilt: $(UV)^* = V^* U^*$

$$(UV)^{-1} = V^{-1} U^{-1}$$

d.h. falls U, V unitär $\Rightarrow$ UV unitär.

Definition: Eine Matrix A heißt normal $:\Leftrightarrow$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^* x, A^* y \rangle$$

Bemerkung: Die obigen Definitionen "selbstadj, unitär, normal" kann man entsprechend auch für lineare Abbildungen verwenden.

Satz: Alle selbstadjungierten und alle unitären Matrizen sind auch normal:

Beweis a) Sei A selbstadj.

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^* x, A^* y \rangle$$

b) Sei A unitär $\Rightarrow$ A^* ist unitär

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle A^* x, A^* y \rangle = \langle A A^* x, y \rangle = \langle A A^{-1} x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$