Lemma: Sei V ein K-VR. $\mathcal{L} \subset V$ eine Teilmenge linear unabhängiger Vektoren. Sei $v \in V$.

$\mathcal{L} \cup \{v\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $v \notin \operatorname{span} \mathcal{L}$

Beweis: a) z.z.: "$\underbrace{v \in \operatorname{span} \mathcal{L}}$ $\Rightarrow$ lin. abhängig"

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, l_i \in \mathcal{L}.$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i - v \qquad \Rightarrow \mathcal{L} \cup \{v\} \text{ ist lin. abh.}$$

$\uparrow$ Vorfaktor $= -1$

b) z.z.: "$v \notin \operatorname{span} \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ lin. unabhängig"

$$0 = \alpha \cdot v + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i l_i$$

Wäre $\alpha \neq 0$ so könnte man $v = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha} l_i$

Aber v ist n.V. $\notin \operatorname{span} \mathcal{L}$, lässt sich also nicht so schreiben $\Rightarrow \alpha = 0$

Da $\mathcal{L}$ lin. unabh. folgt auch $\alpha_i = 0 \quad \forall i = \{1, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \mathcal{L} \cup \{v\}$ ist lin. unabhängig.

Bemerkung: Jeder Vektorraum hat eine Basis. Dies folgt zusammen mit den Axiomen der Mengenlehre inklusive Auswahlaxiom, der Beweis ist nicht Thema der Vorlesung.

Wir werden uns im folgenden meist mit endlich erzeugten Vektorräumen, d.h. solchen, die sich durch endlich viele Vektoren erzeugen lassen, beschäftigen.

Satz: Sei V ein VR, E ein Erzeugendensystem von V mit $|E| =: n < \infty$. Sei $\mathcal{L} \subset V$ lin. unabhängig. Dann gibt es eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset E$, so dass $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ eine Basis von V ist. (Ergänzungssatz).

Korollar: Jede Basis eines endlich erzeugten VR hat gleich viele Elemente.

Definition: Die Anzahl der Basiselemente eines endlich erzeugten VR nennt man Dimension des Vektorraumes,

Man definiert $\dim V = \infty$ falls V nicht endlich erzeugt.

Beweis des Satzes: $E \subset V$ sei Erz. sys., $\alpha \subset V$ linear unabhängig.

Wir ergänzen die Menge α iterativ um Elemente aus E ohne die lineare Unabhängigkeit aufzugeben:

1. Fall: $E \subset \operatorname{span} \alpha_j$ breche Iteration ab

2. Fall: $E \not\subset \operatorname{span} \alpha_j \Rightarrow \exists\, e \in E$ mit $e \notin \operatorname{span} \alpha$.

$$\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\alpha_j \cup \{e\}}_{\alpha_{j+1}} \text{ ist linear unabhängig.}$$

Hierbei wählen wir $\alpha_0 = \alpha$. Dies Iteration bricht irgendwann ab, da sich nur maximal n Schritte durchführen lassen.

Wir erhalten also eine linear unabhängige Menge α_j mit $E = \operatorname{span} \alpha_j$.

$\mathcal{L}_j$ erzeugt in der Tat ganz V, ist also Basis.

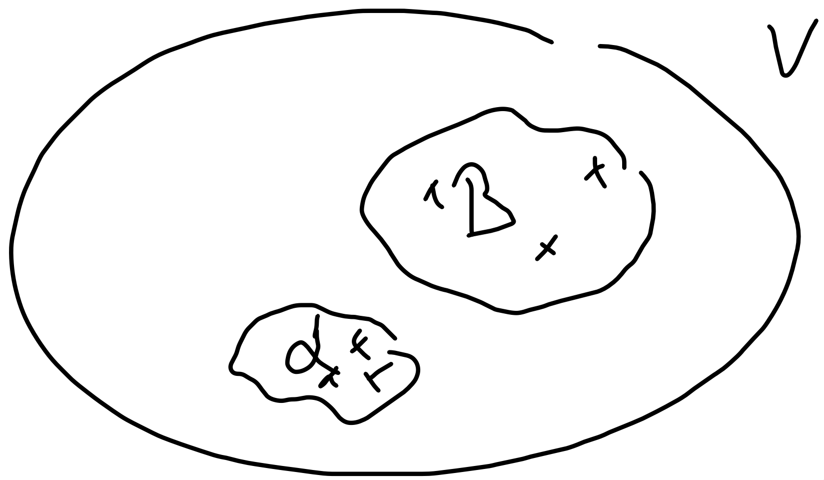
Warum? Sei $v \in V$ beliebig.

$$v_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \, , \quad \text{da } E \text{ ES ist.}$$

$\forall k = \{1, \dots n\}$ gilt $e_k = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k \, l_i$.

$$\Rightarrow v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k \, l_i$$ also Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{L}_i$. $\square$

<u>Satz</u>: (Austauschsatz): Falls $\mathcal{B}$ eine Basis eines VR V ist, $\mathcal{L} \subset V$ linear unabhängig, dann gibt es eine Menge $\mathcal{L} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{B}$, mit $\mathcal{A}$ ist Basis von V und $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.



Wie im Ergänzungssatz bilden wir eine Basis, die ganz α enthält und mit Elementen aus B ergänzt wird.

Dieser Satz ist eine stärkere Version des Korollars.

<u>Beweis</u>: Sei B eine Basis, $v \in \alpha$.

Wir bilden eine neue Basis des VR durch Hinzunahme von v und Rauswerfen eines Elements von B.

$$0 \neq v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \qquad b_j \in B.$$

Mindestens ein $\alpha_j \neq 0$. Jedes dieser b_j kann entfernt werden.
Dadurch bleibt $(B \cup \{v\}) \setminus \{b_j\} = \tilde{B}$ eine Basis.

z.z. $\tilde{B}$ ist weiterhin linear unabhängig:

$$0 = \sum_{k \neq j} \beta_k b_k + \alpha v. \qquad \text{z.z. } \beta_k = 0,\ \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k \neq j} \beta_k b_k + \alpha \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$$

Die $\{b_k\}$ sind lin. unabhängig. Insbesondere muß der $\underbrace{\text{Vorfaktor von } b_j}_{= \alpha \cdot \alpha_j}$ gleich 0 sein. $\Rightarrow \alpha \cdot \alpha_j = 0$

Aber $\alpha_j \neq 0$, so hatten wir j ausgewählt. $\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow 0 = \sum_{k \neq j} \beta_k b_k$ Da $\{b_k\}$ lin. unabh $\Rightarrow \beta_k = 0$ $\forall k$.

z.z: $\tilde{B}$ ist weiterhin erzeugenden system.

Sei $w \in V$ beliebig. $w = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k b_k = \sum_{k \neq j} \gamma_k b_k + \gamma_j b_j$

Außerdem: $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$ mit $\alpha_j \neq 0$ für irgendein j.

$$\Rightarrow \quad b_j = \frac{v}{\alpha_j} + \sum_{\ell \neq j} \frac{-\alpha_\ell}{\alpha_j} \, b_\ell$$

$$\Rightarrow \quad w = \sum_{\ell \neq j} \dots b_\ell + \gamma_j \frac{v}{\alpha_j} + \sum_{\ell \neq j} \dots b_\ell$$

w ist also in der Tat Linearkombination von Elementen aus $\tilde{B}$.

$$\{ b_1 \dots b_j, b_n \} \qquad v$$

Wir machen diesen Austausch nacheinander mit allen Elementen aus α. Das einzige worauf wir achten müssen ist, dass wir nicht gezwungen sind ein Element aus α später zu entfernen.

z.B. $\{ b_1 \dots, b_q, \ell_{q+1} \dots \ell_n \}$ wir möchten ein weiteres Element aus α hinzufügen. $(v \in \alpha)$

$$v = \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell b_\ell + \sum_{\ell=q+1}^{n} \alpha_\ell \ell_\ell$$

Wir müssen sicherstellen, dass ein der Vorfaktoren vor den b's ungleich 0 ist.

WA: $\alpha_k = 0 \quad \forall\ k \leq q$

$\Rightarrow v = \sum \alpha_k l_k$ aber $v \in \mathcal{L}$, ebenso $l_k \in \mathcal{L}$

$\lightning$ zur linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{L}$. $\square$