Anschauung zum Austauschsatz:

Basis $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ lin unabh.

$B = \{ b_1, \cancel{b_2}, \dots \cancel{b_m} \}$ $\qquad\qquad$ $L = \{ \ell_1, \ell_2, \dots \ell_g \}$

A $\{ \ell_1, \dots, \ell_g \} \cup F$ $\qquad\qquad$ $F \subset B$

$|B| = |L| + |F|$

<u>Beweis des Korollars</u>: WA: $|B| > |A|$.

A ist Basis $\qquad\qquad\qquad\qquad$ B ist lin unabh.

$\{ a_1, \dots a_n \}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\{ b_1 \dots b_l \}$ $\lightning$

(Direkte) Summen von Vektorräumen

Def.: Sei V ein VR (über K). U, W Untervektorräume von V. Dann nennt man $\operatorname{span}(U \cup W) =: U \oplus W$ die ~~direkte~~ Summe von U und W.

Bem: $U \oplus W$ ist als lineare Hülle einer Teilmenge von V ein UVR von V.

Es gilt: $v \in U \oplus W \iff v$ kann geschrieben werden als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

(Beweis klar.) Daher der Name "direkte Summe".

Satz: Seien U, W Untervektorräume von V. Dann gilt:

$$\dim U + \dim W = \dim U \oplus W + \dim U \cap W.$$

Beweis: Es gilt offensichtlich:

$$U \cap W \subset U \qquad U \cap W \subset W$$

$$U \subset U \oplus W \qquad W \subset U \oplus W$$

$$\Rightarrow \quad U \cap W \subset U \oplus W$$

Sei B Basis von $U \cap W$.

$B = \{ b_1, \dots b_n \}$

Wegen des Ergänzungssatzes (oder Austauschsatzes) findet man Mengen B^U, B^W (und $B^{U \oplus W}$) welche Basen von U, W bzw $U \oplus W$ sind und jeweils B enthalten.

$B^U = \{ b_1, \dots, b_n \} \cup \{ b^U_{n+1}, \dots, b^U_k \}$ ~~etc.~~

$B^W = \{ b_1, \dots b_n \} \cup \{ b^W_{n+1}, \dots b^W_m \}$

z.z. $B^U \cup B^W$ ist Basis von $U \oplus W$.

Dies ist offensichtlich Erzeugendensystem von $U \oplus W$, da sich jedes $v \in U \oplus W$ als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ schreiben lässt und da jedes u und jedes w sich als Linearkombi von B^U bzw B^W schreiben.

Wir zeigen noch die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $(b_1, b_2, \dots, b_n, b^U_{n+1}, \dots b^U_q, b^W_{n+1}, \dots, b^W_m)$.

Betrachte dazu
$$0 = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j}_{\in U \cap W} + \sum_{j=n+1}^{q} \alpha_j^U b_j^U + \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j^W b_j^W.$$

$\in U$ $\in W$

Erst zeigen wir, dass $v = \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j^W b_j^W = 0$. $v \in W$

$v = -\bigcirc \in U$. $\Rightarrow v \in U \cap W$. d.h. $\boxed{v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = \sum \alpha_j^W b_j^W}$

da die b_j und b_j^W lin. unabh. $\Rightarrow$ $v = 0$

$$0 = \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j^W \underbrace{b_j^W}_{=0} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{b_j}_{=0}$$

Basis von W.

$$\Rightarrow \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j^W b_j^W = 0 \qquad \text{ebenso} \qquad \sum_{j=n+1}^{k} \alpha_j^U b_j^U = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j = 0$$

Da die b_j^W lin. unabh $\Rightarrow$ $\alpha_j^W = 0 \quad \forall j$

ebenso $\alpha_j^U = 0 \quad \forall j$

ebenso $\alpha_j = 0 \quad \forall j$ $\square$

$\Rightarrow$ Basiseigenschaft. Außerdem sind $\{b_j^W : j = \{n+1, \dots, m\}\}$ $\{b_j^U : j \in \{n+1, \dots, k\}\}$ und B paarweise schnittfremd.

$$\Rightarrow |B| + |B \cup \{b_j^U\} \cup \{b_j^W\}| = |B \cup \{b_j^U\}| + |B \cup \{b_j^W\}|$$

$$\dim U \cap W + \dim U \oplus W = \dim U + \dim W \quad \square$$

Darstellung von Vektoren

Zur Koordinatisierung von Vektoren ist es wichtig die Basen mit einer Ordnung zu versehen. Wir betrachten n-Tupel statt Mengen. Das nennt man dann eine geordnete Basis.

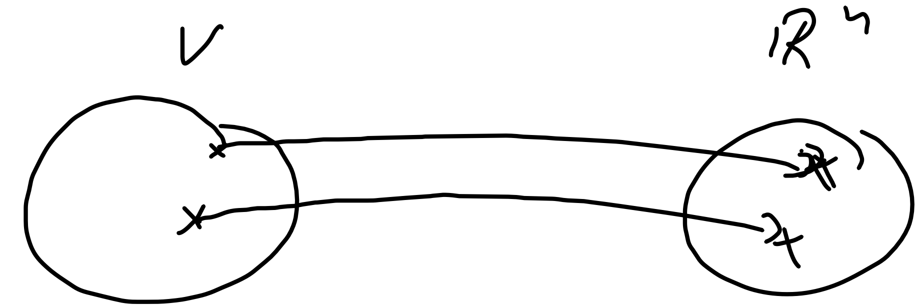
<u>Notation</u>: Gegeben ein VR V mit geordneter Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ mit $n = \dim V < \infty$. Dann bezeichnet man mit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B \quad \text{den Vektor} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j .$$

Auf Grund der äquivalenten Definition der Basis funktioniert das für jeden Vektor in eindeutiger Weise, d.h. für jeden Vektor v findet man in eindeutiger Weise eine Darstellung in gegebener Basis.

6. Lineare Abbildungen

Motivation: Gegeben ein VR V und eine Basis B dazu.
Man erhält ganz natürlich eine Abbildung von
$V \to \mathbb{R}^n$ (angenommen $n = \dim V < \infty$), die
jedem Vektor seine Koordinaten in der Basis B zuweist.



Diese Abbildung ist bijektiv.
Außerdem ist sie linear:

Definition: Seien V, W Vektorräume zum selben Körper K.
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt <u>linear</u> $:\Leftrightarrow$

a) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall\, a, b \in V$

b) $f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad \forall\, \lambda \in K,\ \forall\, a \in V$.

Man nennt solche Abbildungen auch Vektorraumhomomorphismus.

Für die Abbildung auf die Koordinaten ist die Linearität relativ offensichtlich

$$v = \sum \alpha_j b_j \qquad w = \sum \beta_j b_j$$

$$\Rightarrow \quad v + w = \sum (\alpha_j + \beta_j)\, b_j \qquad \text{ebenso } \lambda v \ldots$$